



ข้อสอบกลางภาค ประจำปีภาคปลาย ปีการศึกษา 2561
รายวิชา 30211259 - Calculus II
สอบวันที่ 3 มีนาคม 2562 เวลา 09:00 - 12:00 น.

ชื่อ - นามสกุล รหัสประจำตัว

คณะ กลุ่ม ลำดับที่

ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 14 หน้า 21 ข้อ 100 คะแนน (คิดเป็น 50%) ให้แสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ
2. ห้ามนำกระดาษ เครื่องคำนวณ และสูตรใดๆเข้าห้องสอบ ถ้าตรวจพบถือว่าทุจริตในการสอบ
3. ห้ามใช้โทรศัพท์มือถือถือในระหว่างการสอบ และปิดอุปกรณ์สื่อสารทุกชนิด ถ้าตรวจพบถือว่าทุจริตในการสอบ
4. ไม่อนุญาตให้นิสิตผู้เข้าสอบออกจากห้องสอบ จนกว่าจะได้รับอนุญาตจากกรรมการผู้คุมสอบเท่านั้น
5. ทุจริตมีโทษตามระเบียบข้อบังคับมหาวิทยาลัยว่าด้วยการศึกษา พ.ศ. ๒๕๕๙ ข้อ ๕ โทษการกระทำ การส่อเจตนาทุจริต หรือกระทำการทุจริตในการวัดผล
 - 1) กระทำการส่อเจตนาทุจริต ระดับโทษ พักการศึกษา 1 ภาคการศึกษาและปรับตกในรายวิชาที่กระทำการส่อเจตนาทุจริต
 - 2) กระทำการทุจริต ระดับโทษ พักการศึกษา 1 ปีการศึกษา และปรับตกในรายวิชาที่กระทำการทุจริต
 - 3) กรณีการกระทำทุจริตโดยการเข้าสอบแทนกัน ไม่ว่าจะมีการปลอมแปลงบัตรประจำตัวนิสิตหรือไม่ก็ตาม ผู้อนุญาตให้ผู้อื่นเข้าสอบแทน ระดับโทษ พักการศึกษา 2 ปีการศึกษา และปรับตกในรายวิชาที่กระทำการทุจริต นิสิตผู้เข้าสอบแทน ระดับโทษ พักการศึกษา 2 ปีการศึกษา
 - 4) กรณีนิสิตกระทำการส่อเจตนาทุจริตหรือกระทำการทุจริตในการวัดผล และได้รับโทษตาม (1) ถึง (3) แล้วแต่กรณี หากนิสิตที่ได้รับโทษได้กระทำความผิดในลักษณะเดียวกันอีกเป็นครั้งที่สอง ไม่ว่าจะเป็นการกระทำการส่อเจตนาทุจริตหรือกระทำการทุจริตก็ตาม ให้ลงโทษไล่ออก

ข้อ	1 (4)	2 (4)	3 (3)	4 (5)	5 (4)	6 (5)	7 (4)	คะแนนรวม (100)
คะแนน								
ข้อ	8 (5)	9 (4)	10 (5)	11 (3)	12 (3)	13 (9)	14 (6)	
คะแนน								
ข้อ	15 (6)	16 (4)	17 (4)	18 (5)	19 (5)	20 (5)	21 (7)	
คะแนน								

กลุ่ม 01 ผศ.ดร.อภิสิทธิ์ ภคพงศ์พันธุ์ ห้อง K-C200
 กลุ่ม 03 ดร.เดชชาติ สามารถ ห้อง KB-302
 กลุ่ม 05 ดร.ชาติไทย ไทยประยูร ห้อง KB-303
 กลุ่ม 07 ดร.รักพร ดอกจันทร์ ห้อง KB-205,206
 กลุ่ม 09 อ.เสาวรส ศรีสุข ห้อง K-C200
 กลุ่ม 11 ดร.จุฑารัตน์ คงสอน ห้อง QS1-5002

กลุ่ม 02 ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์ ห้อง KB-203
 กลุ่ม 04 ผศ.ดร.อังคณา บุญดิเรก ห้อง KB-205
 กลุ่ม 06 อ.พรทิพย์ เกษมพิณ ห้อง KB-203,204
 กลุ่ม 08 ดร.สมคิด อินเทพ ห้อง QS1-3001
 กลุ่ม 10 ดร.บุญยงค์ ศรีพลแผ้ว ห้อง KB-301

สูตรการหาอนุพันธ์	สูตรการหาปริพันธ์
1. $\frac{dc}{dx} = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ	1. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่
2. $\frac{d}{dx} c \cdot f(x) = c \frac{d}{dx} f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ	2. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
3. $\frac{d}{dx} (u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$	3. $\int 1 du = u + c$
4. $\frac{d}{dx} (u \cdot v) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$
5. $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$; $v \neq 0$	5. $\int \frac{1}{u} du = \ln u + c$ เมื่อ $u > 0$
6. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$	6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$
7. $\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$	7. $\int e^u du = e^u + c$
8. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$	8. $\int \sin u du = -\cos u + c$
9. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$	9. $\int \cos u du = \sin u + c$
10. $\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$	10. $\int \sec^2 u du = \tan u + c$
11. $\frac{d}{dx} (\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$	11. $\int \csc^2 u du = -\cot u + c$
12. $\frac{d}{dx} (\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$	12. $\int \sec u \tan u du = \sec u + c$
13. $\frac{d}{dx} (\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$	13. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + c$
14. $\frac{d}{dx} (\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$	14. $\int \tan u du = \ln \sec u + c$
15. $\frac{d}{dx} (\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$	15. $\int \cot u du = \ln \sin u + c$
16. $\frac{d}{dx} (\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$	16. $\int \sec u du = \ln \sec u + \tan u + c$
17. $\frac{d}{dx} (\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$	17. $\int \csc u du = \ln \csc u - \cot u + c$
18. $\frac{d}{dx} (\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$	18. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} du = \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$ เมื่อ $a > 0$
19. $\frac{d}{dx} (\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$	19. $\int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c$ เมื่อ $a > 0$
20. $\frac{d}{dx} (\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$	20. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}} du = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left \frac{u}{a} \right + c$ เมื่อ $a > 0$
21. $\frac{d}{dx} (\sec^{-1} u) = \frac{1}{ u \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$	21. $\int \frac{1}{u^2-a^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + c$
22. $\frac{d}{dx} (\csc^{-1} u) = \frac{-1}{ u \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$	22. $\int \frac{1}{a^2-u^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+u}{a-u} \right + c$
	23. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} du = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + c$
	24. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} du = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{u} \right) + c$
	25. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c$
	26. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln u + \sqrt{u^2 \pm a^2} + c$

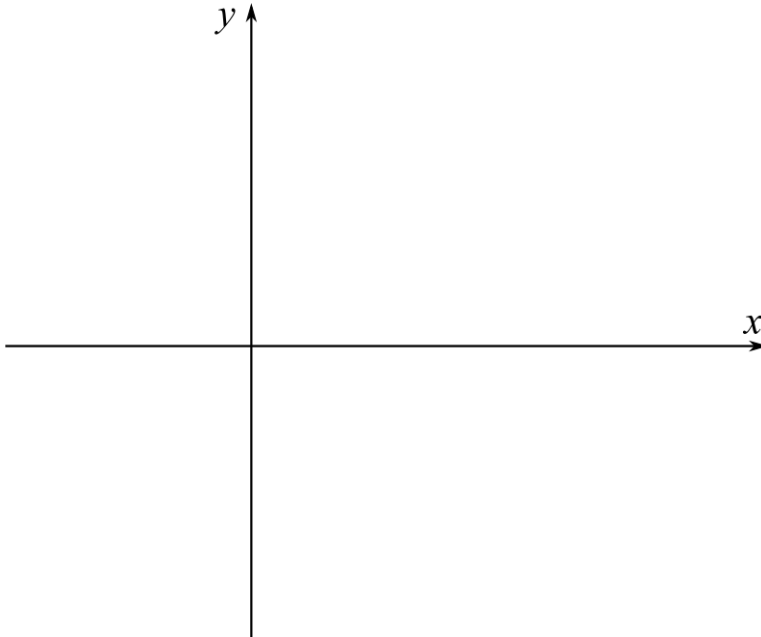
1. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{ถ้า } x < 0 \\ \sin(x), & \text{ถ้า } 0 \leq x < 2 \\ \cos(x), & \text{ถ้า } 2 \leq x < 4 \\ \tan(x), & \text{ถ้า } x \geq 4 \end{cases}$ จงหา $\int_{-2}^1 f(x) dx$ (4 คะแนน)

2. จงหา $\int_{-1}^1 x|x| dx$ (4 คะแนน)

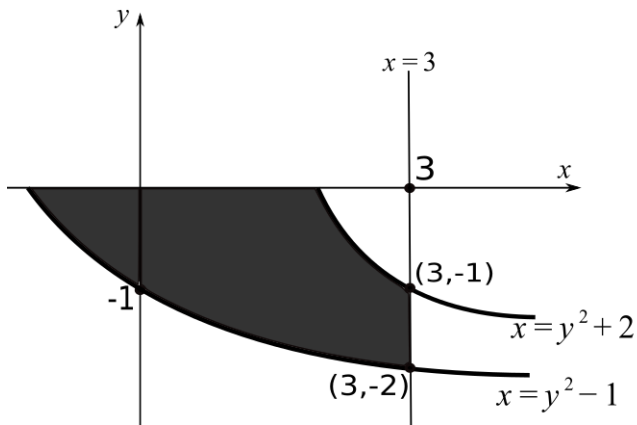
3. จงหา $\frac{d}{dx} \int_{\sin(x)}^{\pi} \frac{e^{5t}}{\cos(5+t)} dt$

(3 คะแนน)

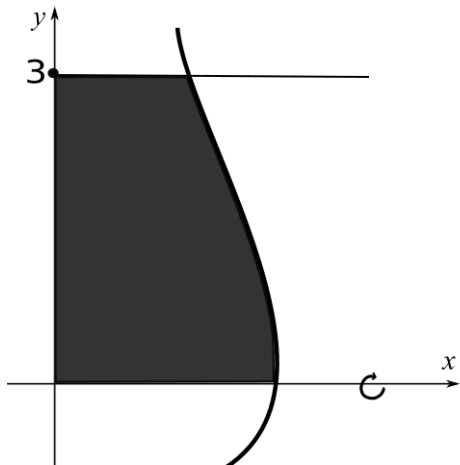
4. กำหนดให้พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y = -x - 1$ และ $y = x - 3$ กับแกน x จงเขียนกราฟบริเวณของพื้นที่ดังกล่าว และใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ (5 คะแนน)



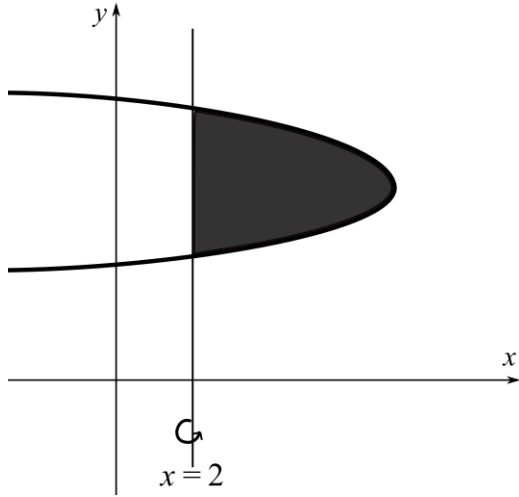
5. จงใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่เฉพาะส่วนที่แรเงา ระหว่าง $x = y^2 + 2$ และ $x = y^2 - 1$ (ดังรูป) (4 คะแนน)
 หมายเหตุ : เขียนในรูปอินทิกรัล(ปริพันธ์) แต่ไม่ต้องหาค่า



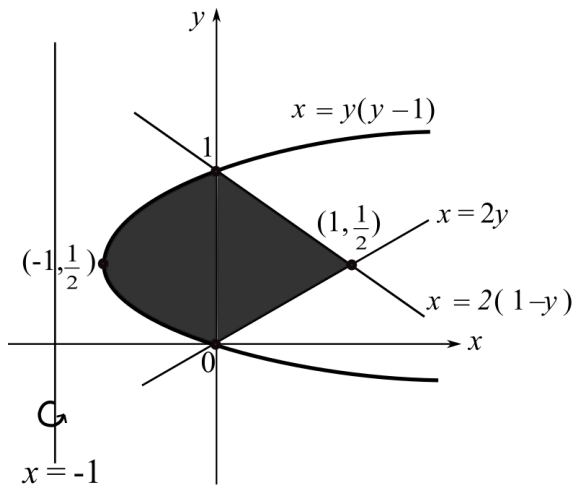
6. จงใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 4}}$ และแกน y บนช่วง $0 \leq y \leq 3$ (ดังรูป) โดยหมุนรอบแกน x (5 คะแนน)



7. จงใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $x = -y^2 + 5y - 4$ กับเส้นตรง $x = 2$ (ตั้งรูป) โดยหมุนรอบเส้นตรง $x = 2$ (4 คะแนน)
 หมายเหตุ : เขียนในรูปอินทิกรัล(ปริพันธ์) แต่ไม่ต้องหาค่า



8. จงใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = y(y - 1)$ กับเส้นตรง $x = 2y$ และ $x = 2(1 - y)$ (ตั้งรูป) โดยหมุนรอบเส้นตรง $x = -1$ (5 คะแนน)
 หมายเหตุ : เขียนในรูปอินทิกรัล(ปริพันธ์) แต่ไม่ต้องหาค่า



9. จงใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาความยาวส่วนโค้งของสมการที่กำหนดโดย $x = 3 \sin(t)$ และ $y = 3 \cos(t)$
 บนช่วง $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (4 คะแนน)

10. จงใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ผิวของรูปทรงที่ได้มาจากการหมุนเส้นโค้ง $y = x^3$ บนช่วง $0 \leq x \leq 1$
 โดยหมุนรอบแกน x (5 คะแนน)

11. จงแปลงจุด $(3\sqrt{3}, -3)$ ในระบบพิกัดฉากให้เป็นจุด (r, θ) ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (3 คะแนน)

12. จงแปลงสมการ $r^2 = \frac{\tan \theta}{3 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta}$ ให้เป็นสมการในระบบพิกัดฉาก (3 คะแนน)

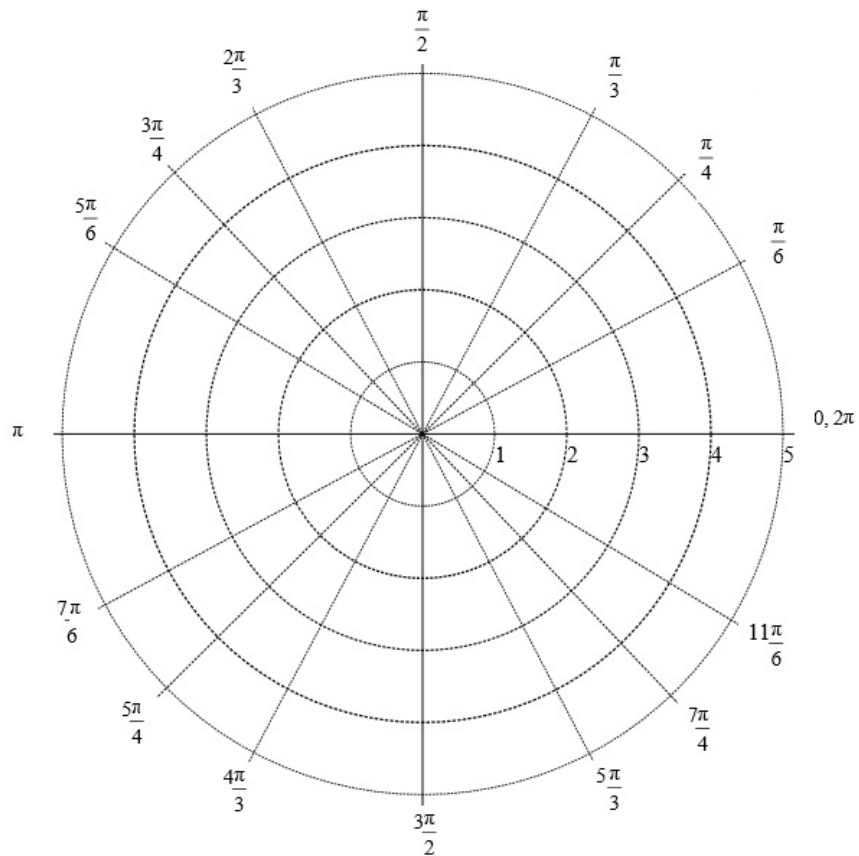
13. กำหนดให้สมการ $r = 1 - 2\cos(2\theta)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

13.1 จงตรวจสอบว่าสมการข้างต้นมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว (หรือแกน x) หรือไม่ (3 คะแนน)

13.2 จงตรวจสอบว่าสมการข้างต้นมีสมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ (หรือแกน y) หรือไม่ (3 คะแนน)

13.3 จงเขียนกราฟของสมการนี้ (3 คะแนน)

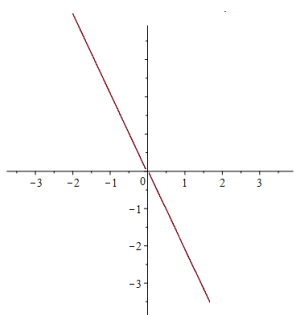
θ													
r													



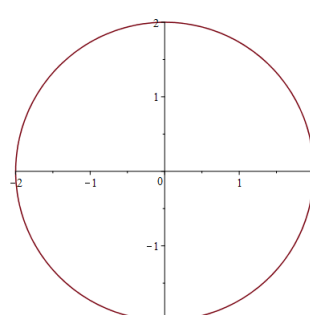
14. กำหนดตัวเลือก

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| (1) $r^2 = 9 \sin(2\theta)$ | (2) $r = 2 + 2 \sin(\theta)$ | (3) $r = 2 - 2 \cos(\theta)$ |
| (4) $r^2 = -9 \sin(2\theta)$ | (5) $r = 2 - 2 \sin(\theta)$ | (6) $r = 2 - 4 \cos(\theta)$ |
| (7) $r^2 = -9 \cos(2\theta)$ | (8) $\theta = \frac{-\pi}{3}$ | (9) $r = 4 - 2 \cos(\theta)$ |
| (10) $r = 1$ | (11) $\theta = \frac{\pi}{3}$ | (12) $\theta = \frac{4\pi}{3}$ |
| (13) $r = 2$ | (14) $r = -6 \cos(\theta)$ | (15) $r = 2 \sin(3\theta)$ |
| (16) $r = 2 \cos(3\theta)$ | (17) $r = 2 \cos(\theta)$ | (18) $r = -2 \sin(3\theta)$ |
| (19) $r = 2 \cos(5\theta)$ | (20) $r = -6 \cos(\theta)$ | (21) ไม่มีคำตอบ |

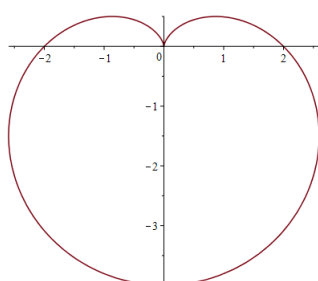
จงเติมเลขข้อของตัวเลือก (1) - (21) ที่กำหนดให้เพียงตัวเลือกเดียว สำหรับกราฟแต่ละข้อต่อไปนี้
(ข้อละ 1 คะแนน = 6 คะแนน)



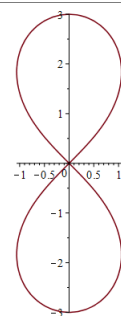
คำตอบ.....



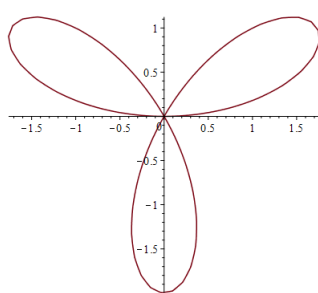
คำตอบ.....



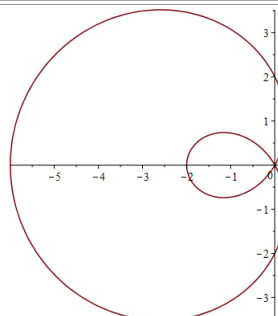
คำตอบ.....



คำตอบ.....

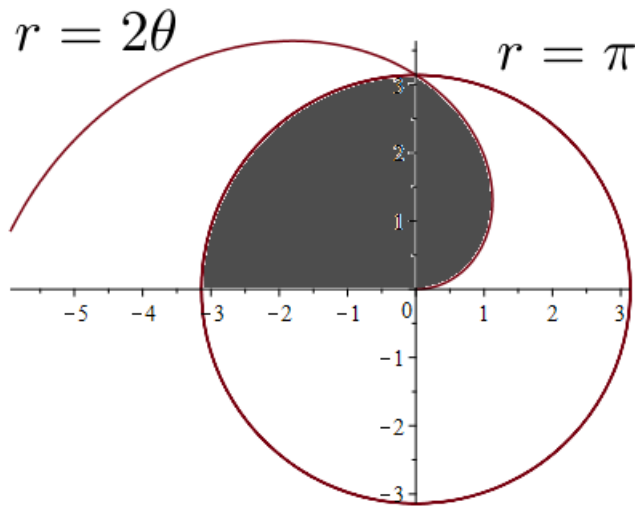


คำตอบ.....



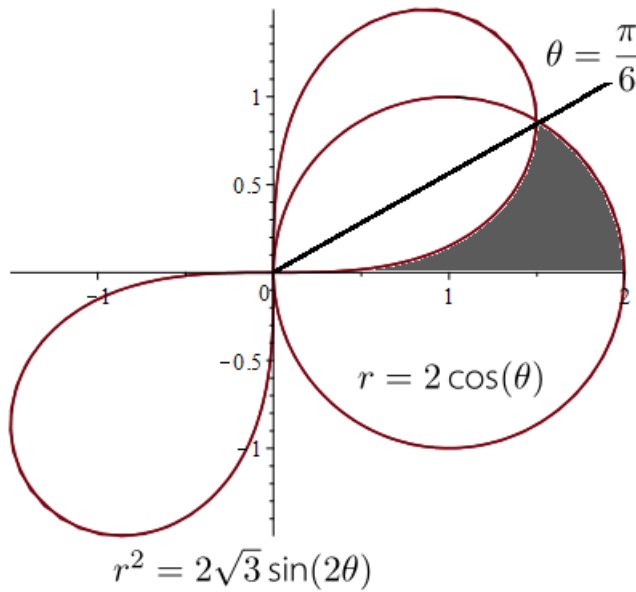
คำตอบ.....

15. จงใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ส่วนที่แรเงา ที่อยู่ภายใน $r = 2\theta$ และ $r = \pi$ บนช่วง $0 \leq \theta \leq \pi$ (ดังรูป)
(6 คะแนน)



16. จงใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ส่วนที่แรเงา ที่กำหนดโดย $r^2 = 2\sqrt{3} \sin(2\theta)$ และ $r = 2 \cos(\theta)$ (ดังรูป) (4 คะแนน)

หมายเหตุ : เขียนในรูปอินทิกรัล(ปริพันธ์) แต่ไม่ต้องหาค่า



17. จงหาพื้นที่ผิวของรูปทรงซึ่งเกิดจากการหมุนของเส้นโค้ง $r = 2 \sin(\theta) + 3 \cos(\theta)$ ในช่วง $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ โดยหมุนรอบแกนเชิงขั้ว (หรือแกน x) (4 คะแนน)

หมายเหตุ : เขียนในรูปอินทิกรัล(ปริพันธ์) แต่ไม่ต้องหาค่า

18. กำหนดค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังตาราง

(5 คะแนน)

x	0	0.5	0.8	1.0	1.5	1.6	2.0	2.4	2.5	3.0	3.2	3.5	4.0
$f(x)$	2	2	1	0	3	4	5	2	4	2	1	0	3

จงใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูเพื่อประมาณค่าของ $\int_0^4 f(x) dx$ เมื่อ $n = 4$ (ตอบเป็นทศนิยม)

ข้อ 19-21 จงใช้กฎของโลปีตาลเพื่อหาค่าของลิมิต

19. จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - \sin x}{x^2 + 1 - \cos x}$

(5 คะแนน)

20. จงหา $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x \right)$

(5 คะแนน)

21. จงหา $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{x^2}$

(7 คะแนน)