Method of Undetermined Coefficient

$g(x)$	$y_p(x)$
$P_n(x)$	$x^s\left(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}+A_nx^n\right)$
$P_n(x)e^{ax}$	$x^se^{ax}\left(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}+A_nx^n\right)$
$P_n(x)e^{ax}\cos(\alpha x+\beta)$ หรือ $P_n(x)e^{ax}\sin(\alpha x+\beta)$	$x^se^{ax}\Big[\left(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}+A_nx^n\right)\cos(\alpha x+\beta)$ $+\left(B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_{n-1}x^{n-1}+B_nx^n\right)\sin(\alpha x+\beta)\Big]$
เมื่อ s เป็น non-negative integer ที่เล็กที่สุด ($s=0, 1, 2, 3,\ldots$) ซึ่งเมื่อคูณเข้าไปแล้วทำให้ไม่มี term ใดใน $y_p(x)$ ซ้ำกับคำตอบของ $y_c(x)$ ของสมการนี้	

Method of Variation of Parameters

$$y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+u_3(x)y_3(x)+\ldots+u_n(x)y_n(x)$$

เมื่อ $u_m(x)=\int\frac{g(x)W_m(x)}{W(y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n)}dx$, $m=0, 1, 2, 3,\ldots, n$

ตารางการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform)

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
$\int_0^\infty e^{-cs}f(t)dt$	$F(s)$	$e^{at}t^n$, $n=$ positive integer	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s>a$
1	$\frac{1}{s}$, $s>0$	$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$, $s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s>a$	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
t^n, $n=$ positive integer	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s>0$	$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s>0$	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$, $c>0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s>0$	$\int_0^t f(t-u)g(u)du$	$F(s)G(s)$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $s>\lvert a\rvert$	$\int_0^t f(t)g(t-u)du$	$F(s)G(s)$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s>\lvert a\rvert$	$\delta(t-c)$	e^{-cs}
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s>a$	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots f^{(n-1)}(0)$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s>a$	$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$

1. (12 คะแนน) จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $y''' = x^2 - x$ โดย**ใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์** (Method of undetermined coefficients)

2. (13 คะแนน) จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $y''' - 2y'' - 3y' = e^{4x}$ โดย**ใช้การแปรผันของพารามิเตอร**
(Variation of Parameters)

3. (17 คะแนน) จงหาผลเฉลยของ $y'' + xy' + y = 0$ รอบจุด Ordinary $x = 0$ โดยเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง ซึ่งมีอย่างน้อย 5 พจน์ (กระจายถึง x^5)

4. (8 คะแนน) จง<u>ตรวจสอบ</u>ว่า $(x-4)^2 y'' - (x-4)y' + \frac{1}{x} y = 0$ มีจุดเอกฐานปกติ (regular singular point) หรือ จุดเอกฐานไม่ปกติ (irregular singular point) หรือไม่ (ถ้ามีคือจุดใดบ้าง)

5. (8 คะแนน) กำหนดให้ $f(t) = \begin{cases} 1 & ,0 \le t < 2 \\ t & ,t \ge 2 \end{cases}$ จงใช้**<u>นิยาม</u>**การแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) หา L $\{f(t)\}$

แนะนำ $\int te^{-st} dt = -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} + c$

6. จงหา $\mathcal{L}\{f(t)\}$ หรือ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ โดยใช้ตาราง (หน้าที่ 2)

6.1. (4 คะแนน) $\mathcal{L}\left\{(t+1)^2\right\}$

6.2. (4 คะแนน) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s^2+4}\right\}$

6.3. (4 คะแนน) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1-2s}{s^2+4s+5}\right\}$

7. (8 คะแนน) จงใช้สังวัตนาการ (convolution theorem) เพื่อหาการแปลงลาปลาซผกผันของ

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)}$$

8. (8 คะแนน) จงใช้การแปลงลาปลาซ (Laplace transforms) หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' + y = 2u_1(t) - u_3(t), \qquad y(0) = 0$$

9. (14 คะแนน) จงใช้การแปลงลาปลาซ (Laplace transforms) หาผลเฉลย $x_1(t)$ ของระบบสมการ

$$x_1''(t) + x_2(t) = t$$
$$x_1(t) + x_2''(t) = t$$

$$x_1(0) = x_1'(0) = x_2(0) = x_2'(0) = 0$$

<u>หมายเหตุ</u> หาเฉพาะค่าของ $x_1(t)$