

ตารางผลการแปลงลาปลาซ

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. $e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n = 1, 2, \dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
9. $x \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$	10. $x \cos(at)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
11. $\sin(at + b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2 + a^2}$	12. $\cos(at + b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2 + a^2}$
13. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	14. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
15. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	16. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
17. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$	18. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$
19. $t^n e^{at}, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	20. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
21. $u_c(t) = u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	22. $\delta(t-c)$	$e^{-cs}$
23. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	24. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
25. $t^n f(t), n = 1, 2, \dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	26. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
27. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	28. $f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

## จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

1. จงหาผลเฉลยทั่วไป  $y = y_c + y_p$  ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ โดยไม่ต้องหาค่าสัมประสิทธิ์ของ  $y_p$

1.1 (5 คะแนน)  $y'' + 9y' + 14y = 7x + e^{-7x} + \cos x$

1.2 (5 คะแนน)  $y'' + 4y = e^{-2x} \cos 2x + 7x \sin 2x$

2. (5 คะแนน) จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ  $x^3y''' + 5x^2y'' - 2xy' - 6y = 0$

3. (4 คะแนน) จงหาจุดเอกฐาน (Ordinary Points) ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ หากไม่มีจุดเอกฐานให้ตอบว่า "ไม่มี"

สมการเชิงอนุพันธ์	จุดเอกฐาน
$y'' - xy' + 2y = 0$	
$(x^2 - 4)y'' + y = 0$	
$2x^2y'' + 7x(x + 1)y' - 3y = 0$	
$(x^2 - 4x + 3)y'' + (x - 2)y' - y = 0$	

4. (7 คะแนน) จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมกำลังรอบจุด  $x_0 = 0$  ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

โดยให้เขียนกระจายถึงพจน์  $(x - x_0)^4$

5. (4 คะแนน) จงใช้นิยามการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) เพื่อหา  $L\{e^{-2t-5}\}$

6. (6 คะแนน) จงใช้ตารางการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) เพื่อหา  $L\{f(t)\}$  ของฟังก์ชัน  $f(t)$  ต่อไปนี้

6.1  $f(t) = t(e^t + e^{-t})^2$

6.2  $f(t) = t^4 - e^{2t} \sin 3t + \cos(t + 4)$

7. (9 คะแนน) จงหาการแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace Transform) ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$7.1 \quad F(s) = \frac{-2s + 6}{2s^2 + 4}$$

$$7.2 \quad G(s) = \frac{3s + 2}{(s - 1)^2}$$

$$7.3 \quad H(s) = \frac{e^{-6s}}{(s + 3)^2 + 5}$$

8. (3 คะแนน) จงใช้สังวัตนาการ (Convolution) เพื่อหาการแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace Transform) ของฟังก์ชัน

$$H(s) = \frac{s}{(s + 1)(s^2 + 4)}$$

โดยไม่ต้องอินทิเกรตออกมา

9. (12 คะแนน) จงใช้การแปลงลาปลาซเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u_2(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$



10. (7 คะแนน) จงใช้การแปลงลาปลาซเพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$x_1''(t) + 2x_1'(t) + 5x_2(t) = 0$$

$$x_1'(t) - x_2'(t) + 2x_2(t) = 0$$

เมื่อ  $x_1(0) = 0$ ,  $x_1'(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 1$

โดยให้หาผลเฉลย  $x_2(t)$