



ข้อสอบปลายภาค ประจำภาคปลาย ปีการศึกษา 2557
รายวิชา 302281 - สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
สอบวันที่ 20 พฤษภาคม พ.ศ.2558 เวลา 17.00-20.00 น.

ชื่อ - นามสกุล รหัสประจำตัว

คณะ กลุ่ม ลำดับที่

***** ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน *****

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 13 หน้า 12 ข้อ 100 คะแนน (คิดเป็น 50%)
2. สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการทำข้อสอบ
3. ห้ามนำกระดาษ เครื่องคำนวณและสูตรใดๆเข้าห้องสอบ
4. ให้เขียนชื่อ รหัสประจำตัว และลำดับที่ ทุกหน้าของข้อสอบ
5. ถ้ายังไม่ได้ส่งข้อสอบ ห้ามออกจากห้องสอบไม่ว่ากรณีใดๆ
6. ทุจริตมีโทษสูงสุดตามระเบียบมหาวิทยาลัย

คะแนน (สำหรับอาจารย์)

ข้อ	1 (6)	2 (10)	3 (10)	4 (10)	5 (6)	6 (12)	7 (6)
คะแนน							
ข้อ	8 (8)	9 (8)	10 (4)	11 (10)	12 (10)	รวม	
คะแนน							

กลุ่ม 1& 301	อาจารย์ ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์	ห้อง K-A500
กลุ่ม 2	ผศ. ดร.สหทัย รัตนมงคลกุล	ห้อง K-C300
กลุ่ม 3	ผศ. ดร.สินีนานา ศรีมงคล	ห้อง K-C300
กลุ่ม 4	ผศ. ดร.ดวงกมล ผลเต็ม	ห้อง K-A500
กลุ่ม 501	อาจารย์ ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์	ห้อง K-A500

*****คำแนะนำ*****

วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (Method of Undetermined Coefficients)

ตาราง ผลเฉลยเฉพาะของ $ay'' + by' + cy = g_i(x)$

$g_i(x)$	y_{p_i}
$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$	$x^s (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x} \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases}$	$x^s \left[(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha x} \cos \beta x \right. \\ \left. + (B_0x^n + B_1x^{n-1} + \dots + B_n)e^{\alpha x} \sin \beta x \right]$

s เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด ($s = 0, 1$ หรือ 2) ที่ทำให้ y_{p_i} เป็นผลเฉลยที่ไม่ซ้ำกับผลเฉลยที่ได้จาก homogeneous equation

วิธีการผันแปรของพารามิเตอร์ (Variation of Parameters)

ถ้า $p(x)$, $q(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function) บนช่วงเปิด I และ y_1 และ y_2 สองผลเฉลยที่เป็นอิสระต่อกันของสมการ homogeneous ที่สอดคล้องกับสมการ nonhomogeneous

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

แล้วผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

เมื่อ $W(y_1, y_2)$ แทน Wronskian ของ y_1 และ y_2

ตารางผลการแปลงลาปลาซและการแปลงลาปลาซผกผัน

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. \sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	5. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	12. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
13. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	14. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
15. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	16. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
17. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	18. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
19. $t^n e^{at}, n=1,2,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	20. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
21. $u_c(t) = u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	22. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
23. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	24. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
25. $t^n f(t), n=1,2,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	25. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
27. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	28. $f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
29. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		

*****จบคำแนะนำ*****

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

1. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธ์ (Nonhomogeneous Equation)

$$y'' - 4y = g(x)$$

ซึ่งมีผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธ์ (Homogeneous Equation) $y'' - 4y = 0$ เป็น

$$y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไป $y = y_c + y_p$ ของ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธ์ข้างต้น เมื่อกำหนด $g(x)$ ดังต่อไปนี้ โดยไม่ต้องหาค่าสัมประสิทธิ์ของ y_p

1.1 $g(x) = xe^x + \cos 2x$ (3 คะแนน)

1.2 $g(x) = e^{-2x} + x^2$ (3 คะแนน)

2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y' - 2y = 2e^{2x} + 4$$

โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (Undetermined Coefficients)

(10 คะแนน)

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = \frac{3}{x^3}, \quad x \neq 0$$

เมื่อกำหนด $y_c = c_1x^2 + c_2\frac{1}{x}$

(10 คะแนน)

4. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$$

โดยกำหนดให้ $x = e^t$

(10 คะแนน)

5. จงบอกจุดสามัญ (Ordinary Points) จุดเอกฐาน (Singular Points) ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ หากไม่มีให้ตอบว่า "ไม่มี" และหากเป็นจุดเอกฐาน ให้ตรวจสอบต่อว่าจุดที่ได้นั้นเป็นจุดเอกฐานปกติ (Regular Singular Points) หรือจุดเอกฐานไม่ปกติ (Irregular Singular Points)

5.1 $x^2(x-1)^2y'' + \sin xy' + (x-1)y = 0$ (3 คะแนน)

5.2 $(x+1)y'' - x^2y' + 3y = 0$ (3 คะแนน)

6. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมกำลังรอบจุด $x_0 = 0$ ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + x^2y + xy = 0$$

โดยให้เขียนกระจายถึงพจน์ $(x - x_0)^6$

(12 คะแนน)

7. จงใช้นิยามการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) เพื่อหา $L\{f(t)\}$ เมื่อ

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 4; \\ e^{3t}, & t \geq 4. \end{cases}$$

(6 คะแนน)

8. จงใช้ตารางการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) เพื่อหา $L\{f(t)\}$ ของฟังก์ชัน $f(t)$ ต่อไปนี้

8.1 $f(t) = e^{4t} \sinh(5t) + \cos(2t - 3)$

(4 คะแนน)

8.2 $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 2; \\ t, & 2 \leq t < 3; \\ 3, & t \geq 3. \end{cases}$

(4 คะแนน)

9. จงหาการแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace Transform) ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$9.1 \quad F(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s}e^{-3s} + e^{-5s} \quad (4 \text{ คะแนน})$$

$$9.2 \quad G(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+5} \quad (4 \text{ คะแนน})$$

10. จงใช้สังวัตนาการ (Convolution) เพื่อหาการแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace Transform) ของฟังก์ชัน

$$H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)}$$

(4 คะแนน)

11. จงใช้การแปลงลาปลาซเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -3$$

(10 คะแนน)

12. จงใช้การแปลงลาปลาซเพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$x'(t) - 2x(t) - y(t) = 0$$

$$y'(t) - 3x(t) - 4y(t) = 0$$

เมื่อ $x(0) = 1, y(0) = 0$

(10 คะแนน)