



ข้อสอบปลายภาค ประจำภาคปลาย ปีการศึกษา 2561
รายวิชา 30228159 - สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
สอบวันที่ 7 พฤษภาคม พ.ศ. 2562 เวลา 9.00-12.00 น.

ชื่อ - นามสกุล รหัสประจำตัว

คณะ กลุ่ม ลำดับที่

***** ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน *****

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 15 หน้า 12 ข้อ 96 คะแนน (คิดเป็น 48%)
2. สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการทำข้อสอบ
3. ห้ามนำกระดาษ เครื่องคำนวณและสูตรใด ๆ เข้าห้องสอบ
4. ให้เขียนชื่อ รหัสประจำตัว และลำดับที่ ทุกหน้าของข้อสอบ
5. ถ้ายังไม่ได้ส่งข้อสอบ ห้ามออกจากห้องสอบไม่ว่ากรณีใด ๆ
6. **ส่งทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ภาคการศึกษา**
ทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ปีการศึกษา
ให้ผู้อื่นเข้าสอบแทน ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 2 ปีการศึกษา

คะแนน (สำหรับอาจารย์)

ข้อ	1 (6)	2 (10)	3 (5)	4 (3)	5.1 (3)	5.2 (3)
คะแนน						
ข้อ	5.3 (5)	6.1 (3)	6.2 (6)	6.3 (4)	6.4 (5)	7 (5)
คะแนน						
ข้อ	8 (10)	9 (8)	10 (10)	11 (5)	12 (5)	
คะแนน						

รวม

Differentiation

$$\frac{dc}{du} = 0, \quad (c \text{ constant})$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{Chain Rule})$$

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ \& \& \& } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ \& \& \& } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

Integration

$$\int du = u + c$$

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (\text{by part})$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + c, \quad a \neq 1 \text{ \& \& \& } a > 0$$

$$\int \sin u du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u du = \sin u + c$$

$$\int \tan u du = -\ln |\cos u| + c$$

$$\int \cot u du = \ln |\sin u| + c$$

$$\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + c$$

$$\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \operatorname{arcsinh} \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \operatorname{arccosh} \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \sin^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + c$$

$$\int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + c$$

$$\int \tan^2 u du = \tan u - u + c$$

$$\int \cot^2 u du = -\cot u - u + c$$

$$\int \ln u du = u \ln u - u + c$$

Table of Laplace Transform

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. \sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	6. $t^{\frac{n-1}{2}}, n=1,2,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	12. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
13. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	14. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
15. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	16. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
17. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	18. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
19. $t^n e^{at}, n=1,2,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	20. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
21. $u_c(t) = u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	22. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
23. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	24. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
25. $t^n f(t), n=1,2,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	25. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
27. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	28. $f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
29. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

1. สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ มีจุดสามัญ (ordinary point) จุดเอกฐาน (singular point) หรือไม่ หากไม่มีให้ตอบว่า "ไม่มี" และหากมีจุดเอกฐาน ให้ตรวจสอบต่อว่าจุดที่ได้นั้นเป็นจุดเอกฐานปกติ (regular singular point) หรือจุดเอกฐานไม่ปกติ (irregular singular point)

$$x^2(1-x^2)y'' + \frac{2}{x}y' + 4y = 0$$

(6 คะแนน)

2. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมกำลังรอบจุด $x_0 = 0$ ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(1 - x)y'' + xy' - y = 0$$

โดยให้เขียนกระจายถึงพจน์ $(x - x_0)^4$

(10 คะแนน)

3. จงใช้นิยามการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) เพื่อหา $L\{f(t)\}$ เมื่อกำหนดให้

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & 0 \leq t < 5; \\ -2, & t \geq 5. \end{cases}$$

(5 คะแนน)

4. จงเขียน $f(t)$ ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (unit step function) $u_c(t)$ เมื่อกำหนดให้

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t < 2; \\ e^t + 5, & 2 \leq t < 15; \\ 0, & t \geq 15. \end{cases}$$

(3 คะแนน)

5. จงใช้ตารางการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) เพื่อหา $L\{f(t)\}$ ของฟังก์ชัน $f(t)$ ต่อไปนี้

5.1 $f(t) = 4e^{-2t-\pi} - 7e^{2t} \sin 3t - 2t^5 e^t$ (3 คะแนน)

5.2 $f(t) = 2t - 5u_8(t) \cos(t - 8) + 3e^{2t} \cosh 3t$ (3 คะแนน)

$$5.3 f(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t < 1; \\ \frac{1}{2}t^3, & 1 \leq t < \pi; \\ 2, & t \geq \pi. \end{cases}$$

(5 คะแนน)

6. จงหาการแปลงลาปลาซผกผัน (inverse Laplace transform) ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$6.1 \quad F(s) = \frac{4}{s^4} + \frac{2}{s} - \frac{1}{(s+2)^2} \quad (3 \text{ คะแนน})$$

$$6.2 \quad G(s) = \frac{s^2 + 2s + 9}{(s+1)(s^2+1)} \quad (6 \text{ คะแนน})$$

$$6.3 \ H(s) = \frac{e^{-3s} - 3e^{-6s}}{s - 5}$$

(4 คะแนน)

$$6.4 \ F(s) = \frac{s - 3}{s^2 + 4s + 5}$$

(5 คะแนน)

7. จงใช้สังวัตนาการ (convolution) เพื่อหาการแปลงลาปลาซผกผัน (inverse Laplace transform) ของฟังก์ชัน

$$H(s) = \frac{6}{s(s^2 + 4)}$$

(5 คะแนน)

8. จงใช้การแปลงลาปลาซเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 1 - u_1(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

(10 คะแนน)

9. จงใช้การแปลงลาปลาซเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 3e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

(8 คะแนน)

10. จงใช้การแปลงลาปลาซเพื่อหาผลเฉลย $x(t)$ ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$x'(t) + x(t) - y'(t) + y(t) = 0$$

$$x'(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$$

เมื่อ $x(0) = 0, y(0) = 1$

(10 คะแนน)

11. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$u_{xy} = e^{2x+y}$$

เมื่อ $u = u(x, y)$

(5 คะแนน)

12. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

(5 คะแนน)