



ข้อสอบกลางภาค ประจำปีภาคปลาย ปีการศึกษา 2559
รายวิชา 302281 - สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
สอบวันที่ 28 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2560 เวลา 17.00-20.00 น.

ชื่อ - นามสกุล รหัสประจำตัว

คณะ กลุ่ม ลำดับที่

***** ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน *****

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 17 หน้า (รวมหน้านี้) 15 ข้อ 100 คะแนน (คิดเป็น 50%)
2. สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการทำข้อสอบ
3. ห้ามนำกระดาษ เครื่องคำนวณและสูตรใด ๆ เข้าห้องสอบ
4. ให้เขียนชื่อ รหัสประจำตัว และลำดับที่ ทุกหน้าของข้อสอบ
5. ถ้ายังไม่ได้ส่งข้อสอบ ห้ามออกจากห้องสอบไม่ว่ากรณีใด ๆ
6. **ส่งทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ภาคการศึกษา**
ทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ปีการศึกษา

คะแนน (สำหรับอาจารย์)

ข้อ	1 (7)	2 (7)	3 (7)	4 (5)	5 (7)
คะแนน					
ข้อ	6 (8)	7 (7)	8 (6)	9 (7)	10 (6)
คะแนน					
ข้อ	11 (5)	12 (7)	13 (6)	14 (8)	15 (7)
คะแนน					

กลุ่ม 1/301 ผศ.ดร.ดวงกมล ผลเต็ม ห้อง K-B306
กลุ่ม 2 อาจารย์พรทิพย์ เกษมพิณ ห้อง K-B307
กลุ่ม 3 ผศ.ดร.สัททยา รัตนมงคลกุล ห้อง K-B308
กลุ่ม 4 ดร.ชาติไทย ไทยประยูร ห้อง K-B309
กลุ่ม 501 อาจารย์เสาวรส ศรีสุข ห้อง K-B310

รวม

Differentiation

$$\frac{dc}{du} = 0, (c \text{ constant})$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{Chain Rule})$$

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ และ } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ และ } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arccot } u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arcsec } u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arccsc } u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

Integration

$$\int du = u + c$$

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (\text{by part})$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + c, \quad a \neq 1 \text{ และ } a > 0$$

$$\int \sin u du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u du = \sin u + c$$

$$\int \tan u du = -\ln |\cos u| + c$$

$$\int \cot u du = \ln |\sin u| + c$$

$$\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + c$$

$$\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \text{arcsinh } \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \text{arccosh } \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \sin^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \sin 2u + c$$

$$\int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \sin 2u + c$$

$$\int \tan^2 u du = \tan u - u + c$$

$$\int \cot^2 u du = -\cot u - u + c$$

$$\int \ln u du = u \ln u - u + c$$

Table 1: ตารางแสดงรูปแบบผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $ay'' + by' + cy = g_i(x)$

$g_i(x)$	y_{p_i}
$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$	$x^s(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x} \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases}$	$x^s[(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha x} \cos \beta x$ $+ (B_0x^n + B_1x^{n-1} + \dots + B_n)e^{\alpha x} \sin \beta x]$

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

1. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2x dx + (y + x^2 y) dy = 0, \quad y(0) = -2$$

(7 คะแนน)

2. จงตรวจสอบว่า

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ (homogeneous function) หรือไม่
พร้อมทั้งหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

(7 คะแนน)

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2x + 3) + (2y - 2)\frac{dy}{dx} = 0$$

(7 คะแนน)

4. จงหาตัวประกอบปริพันธ์ (integrating factor) ที่ทำให้สมการ

$$2 \sin y^2 dx + xy \cos y^2 dy = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง (exact differential equation)

(5 คะแนน)

5. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x \frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$$

(7 คะแนน)

6. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = e^x y^4$$

(8 คะแนน)

7. จงหาวงค์เส้นโค้งแนววิถีเชิงตั้งฉาก (orthogonal trajectories) กับวงค์เส้นโค้ง

$$y = \frac{1}{x+c}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

(7 คะแนน)

8. ให้ $y_1 = e^x$ และ $y_2 = xe^x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 2y' + y = 0$$

(6 คะแนน)

8.1 ผลเฉลย y_1 และ y_2 เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly independence) ต่อกัน หรือไม่

8.2 กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 3$ และ $y'(0) = 1$ จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

9. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0, \quad x > 0$$

เมื่อกำหนด $y_1(x) = x^3$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

(7 คะแนน)

10. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

(6 คะแนน)

11. กำหนดให้ รากของสมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$0, 3, 4, 4, 1 \pm 2i, 4 \pm 5i, 4 \pm 5i$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

(5 คะแนน)

12. กำหนดให้ $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2$$

(7 คะแนน)

13. ให้

$$F(y^{(4)}, y''', y'', y', y) = x^2 e^{2x} + \cos x$$

แทนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์ อันดับ 4 ที่มีสมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) เป็น

$$(r - 1)(r - 2)^3 = 0$$

(6 คะแนน)

13.1 จงหาผลเฉลยทั่วไป (y_c)13.2 จงเขียนรูปแบบ y_p ที่สอดคล้องกับ y_c โดยไม่ต้องหาค่าสัมประสิทธิ์ของ y_p

14. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + 4y = \csc 2x$$

(8 คะแนน)

15. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = 0$$

(7 คะแนน)