



ข้อสอบกลางภาค ประจำปีภาคปลาย ปีการศึกษา 2561  
รายวิชา 30228159 - สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ  
สอบวันที่ 5 มีนาคม พ.ศ. 2562 เวลา 9.00-12.00 น.

ชื่อ - นามสกุล ..... รหัสประจำตัว .....

คณะ ..... ลำดับที่ .....

**\*\*\* ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน \*\*\***

### คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 16 หน้า (รวมหน้านี้) 15 ข้อ 94 คะแนน (คิดเป็น 47%)
2. สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการทำข้อสอบ
3. ห้ามนำกระดาษ เครื่องคำนวณและสูตรใด ๆ เข้าห้องสอบ
4. ให้เขียน รหัสประจำตัว และลำดับที่ ทุกหน้าของข้อสอบ
5. ถ้ายังไม่ได้ส่งข้อสอบ ห้ามออกจากห้องสอบไม่ว่ากรณีใด ๆ
6. **ส่งทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ภาคการศึกษา**  
**ทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ปีการศึกษา**  
**ให้ผู้อื่นเข้าสอบแทน ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 2 ปีการศึกษา**

คะแนน (สำหรับอาจารย์)

ข้อ	1 (7)	2 (7)	3 (7)	4 (5)	5 (7)	6 (5)
คะแนน						
ข้อ	7 (5)	8 (10)	9 (7)	10 (6)	11 (4)	12 (7)
คะแนน						
ข้อ	13 (4)	14 (7)	15 (6)		รวม (94)	
คะแนน						

**Differentiation**

$$\frac{dc}{du} = 0, (c \text{ constant})$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{Chain Rule})$$

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ และ } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ และ } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arccot } u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arcsec } u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arccsc } u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

**Integration**

$$\int du = u + c$$

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (\text{by part})$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + c, \quad a \neq 1 \text{ และ } a > 0$$

$$\int \sin u du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u du = \sin u + c$$

$$\int \sec^2 u du = \tan u + c$$

$$\int \csc^2 u du = -\cot u + c$$

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + c$$

$$\int \csc u \cot u du = -\csc u + c$$

$$\int \tan u du = -\ln |\cos u| + c$$

$$\int \cot u du = \ln |\sin u| + c$$

$$\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + c$$

$$\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + c$$

$$\int \sinh u du = \cosh u + c$$

$$\int \cosh u du = \sinh u + c$$

$$\int \text{sech}^2 u du = \tanh u + c$$

$$\int \text{csch}^2 u du = -\text{coth } u + c$$

$$\int \text{sech } u \tanh u du = -\text{sech } u + c$$

$$\int \text{csch } u \text{coth } u du = -\text{csch } u + c$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

## จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

1. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$ydy + (e^{-2x} + y^2 e^{-2x})dx = 0, \quad y(0) = 1$$

(7 คะแนน)

2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$$

(7 คะแนน)

3. จงหาค่าของ  $b$  ที่ทำให้สมการ

$$(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0$$

เป็นสมการแม่นตรง (exact equation) และใช้ค่าของ  $b$  ที่ได้หาผลเฉลยของสมการนี้ด้วย

(7 คะแนน)

4. จงหาตัวประกอบปริพันธ์ (integrating factor) ที่ทำให้สมการ

$$(x + 2) \sin y dx + x \cos y dy = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง (exact differential equation)

(5 คะแนน)

5. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x y^3$$

(7 คะแนน)

6. จงหาวงค์เส้นโค้งแนววิถีตั้งฉาก (orthogonal trajectories) กับวงค์เส้นโค้ง

$$y = c \sin x$$

เมื่อ  $c$  เป็นค่าคงตัวใด ๆ

(5 คะแนน)



7. ให้  $y_1 = \sqrt{x}$  และ  $y_2 = \frac{1}{x}$  เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0$$

กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น  $y(1) = 0$  และ  $y'(1) = 1$  จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

(5 คะแนน)

8. ถ้ารอนสเกียน (Wronskian) ของฟังก์ชัน  $f(x)$  และ  $g(x)$  มีค่าเป็น  $3e^{4x}$  และ  $f(x) = e^{2x}$   
จงหา  $g(x)$

(10 คะแนน)

9. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad x > 0,$$

เมื่อกำหนด  $y_1(x) = x^{-1}$  เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

(7 คะแนน)

10. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

(6 คะแนน)

11. กำหนดให้ รากของสมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$0, -1, 0, 2, 2 \pm 4i, 3 \pm 3i, 3 \pm 3i$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

(4 คะแนน)

12. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 4y' + 4y = 6x^2 + 2$$

(7 คะแนน)

13. ให้

$$F(y^{(4)}, y''', y'', y', y) = x^2 e^{-x} + x \cos 2x$$

แทนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์ อันดับ 4 ที่มีสมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) เป็น

$$(r + 1)^2(r - 2i)(r + 2i) = 0$$

(4 คะแนน)

13.1. จงหาผลเฉลยทั่วไป ( $y_c$ )13.2. จงเขียนรูปแบบ  $y_p$  ที่สอดคล้องกับ  $y_c$  โดยไม่ต้องหาค่าสัมประสิทธิ์ของ  $y_p$

14. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + 4y = \sec(2x)$$

(7 คะแนน)

15. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0$$

(6 คะแนน)