



ข้อสอบกลางภาค ประจำปีภาคต้น ปีการศึกษา 2561
รายวิชา 30222159 - คณิตศาสตร์วิศวกรรม 3
สอบวันที่ 2 ตุลาคม พ.ศ. 2561 เวลา 13.00-16.00 น.

ชื่อ - นามสกุล รหัสประจำตัว

กลุ่ม ลำดับที่

***** ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน *****

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 15 หน้า (รวมหน้านี้) 18 ข้อ 90 คะแนน (คิดเป็น 45%)
2. สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการทำข้อสอบ
3. ห้ามนำกระดาษ เครื่องคำนวณและสูตรใด ๆ เข้าห้องสอบ
4. ให้เขียน รหัสประจำตัว และลำดับที่ ทุกหน้าของข้อสอบ
5. ถ้ายังไม่ได้ส่งข้อสอบ ห้ามออกจากห้องสอบไม่ว่ากรณีใด ๆ
6. **สอบทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ภาคการศึกษา**
ทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ปีการศึกษา
ให้ผู้อื่นเข้าสอบแทน ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 2 ปีการศึกษา

คะแนน (สำหรับอาจารย์)

ข้อ	1 (5)	2 (6)	3 (6)	4 (3)	5 (6)	6 (5)
คะแนน						
ข้อ	7 (4)	8 (6)	9 (3)	10 (3)	11 (6)	12 (7)
คะแนน						
ข้อ	13 (5)	14 (3)	15 (6)	16 (5)	17 (6)	18 (5)
คะแนน						

กลุ่ม 1 ผศ.ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์ กลุ่ม 4 ผศ.ดร.สัททยา รัตนะมงคลกุล
กลุ่ม 2 ผศ.ดร.ดวงกมล ผลเต็ม กลุ่ม 501 อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คงสอน
กลุ่ม 3 ผศ.ดร.สินีนานา ศรีมงคล กลุ่ม 502 ผศ.ดร.สัททยา รัตนะมงคลกุล

รวม

Differentiation

$$\frac{dc}{du} = 0, \quad (c \text{ constant})$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{Chain Rule})$$

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arccot } u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arcsec } u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arccsc } u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

Integration

$$\int du = u + c$$

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (\text{by part})$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + c, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0$$

$$\int \sin u du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u du = \sin u + c$$

$$\int \sec^2 u du = \tan u + c$$

$$\int \csc^2 u du = -\cot u + c$$

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + c$$

$$\int \csc u \cot u du = -\csc u + c$$

$$\int \tan u du = -\ln |\cos u| + c$$

$$\int \cot u du = \ln |\sin u| + c$$

$$\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + c$$

$$\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + c$$

$$\int \sinh u du = \cosh u + c$$

$$\int \cosh u du = \sinh u + c$$

$$\int \text{sech}^2 u du = \tanh u + c$$

$$\int \text{csch}^2 u du = -\text{coth } u + c$$

$$\int \text{sech } u \tanh u du = -\text{sech } u + c$$

$$\int \text{csch } u \text{coth } u du = -\text{csch } u + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

1. จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODE) หรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDE) พร้อมทั้งบอกอันดับ (order) ระดับชั้น (degree) และพิจารณาว่าสมการเป็นแบบเชิงเส้น (linear) หรือแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) และพิจารณาปัญหาที่กำหนดให้ว่าเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น (IVP) หรือปัญหาค่าขอบ (BVP) โดยเขียนคำตอบลงในตารางที่กำหนดให้ (5 คะแนน)

ข้อที่	สมการเชิงอนุพันธ์	ODE/PDE	อันดับ	ระดับชั้น	เชิงเส้น/ไม่เชิงเส้น	IVP/BVP
1.1	$2xy + 16y'' = \sin x,$ $y(1) = 1, y'(1) = 0$					
1.2	$\left(y + \frac{dy}{dx}\right)^{3/2} = x \frac{d^2y}{dx^2},$ $y(0) = 1, y'(1) = 0$					

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{x + 2xy}, \quad y(1) = 2$$

(6 คะแนน)

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2x + y^3 \sec^2 x) + (1 + 3y^2 \tan x) \frac{dy}{dx} = 0$$

(6 คะแนน)

4. จงหาตัวประกอบปริพันธ์ (integrating factor) ที่ทำให้สมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง (exact differential equation)

(3 คะแนน)

5. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} - (\tan x)y = 1$$

(6 คะแนน)

6. จงหาวงค์เส้นโค้งแนววิถีตั้งฉาก (orthogonal trajectories) กับวงค์เส้นโค้ง

$$y^2 = 4cx$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

(5 คะแนน)

7. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y^{(4)} + 16y'' = 0$$

(4 คะแนน)

8. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

(6 คะแนน)

9. กำหนดรากสมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์ (homogeneous equation) อันดับที่ 6 คือ

$$0, -1, -1, -1, 3 \pm \sqrt{2}i$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

(3 คะแนน)

10. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธ์ (nonhomogeneous equation)

$$y'' - 8y' + 16y = x^2e^{-4x} + e^{4x} - x \sin(2x)$$

ซึ่งมีผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเอกพันธ์ (homogeneous equation)

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

เป็น

$$y_c = c_1e^{-4x} + c_2xe^{-4x}$$

จงหา y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธ์ข้างต้น โดยไม่ต้องหาค่าสัมประสิทธิ์ของ y_p

(3 คะแนน)

11. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 2y' - 3y = e^{2x} + 4$$

(6 คะแนน)

12. จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x - 2y$$

(7 คะแนน)

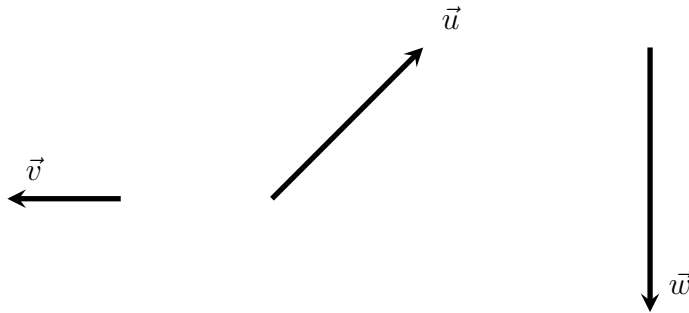
13. จงใช้วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงว่า

$$(1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \cdots + [n \times (n + 1)] = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n

(5 คะแนน)

14. กำหนด ภาพเวกเตอร์ ดังรูป



จงวาดภาพ $\vec{u} - \vec{v} + \frac{\vec{w}}{2}$

(3 คะแนน)

15. กำหนดจุด $P(1, -3)$ จุด $Q(-1, -2)$ และ จุด $R(0, 2)$

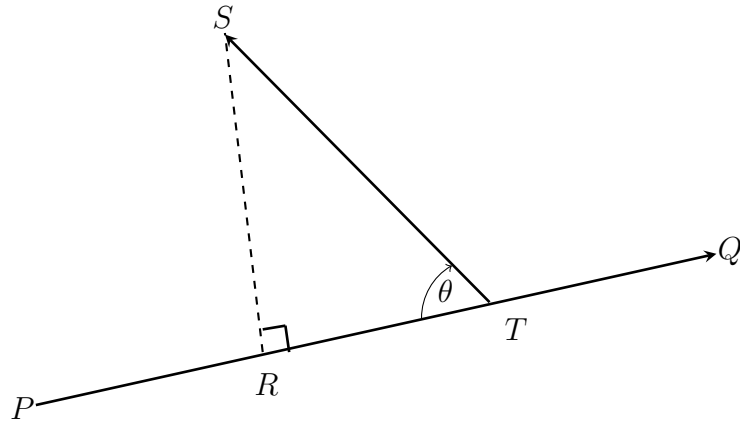
15.1. จงหาขนาดของเวกเตอร์ $\vec{QP} - \vec{PR}$

(3 คะแนน)

15.2. จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาด 5 หน่วยและมีทิศทางตรงข้ามกับ \vec{QP}

(3 คะแนน)

16. กำหนดเวกเตอร์ดังรูป

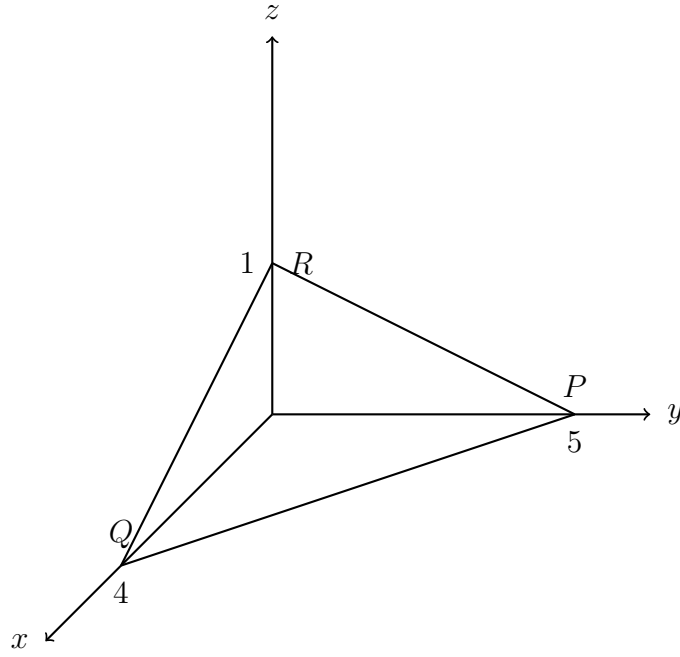


ถ้าเวกเตอร์ \vec{TS} มีขนาด 3 หน่วย มุม $\theta = \frac{\pi}{3}$ เวกเตอร์ $\vec{PQ} = \langle 2, 2, 1 \rangle$

จงหาเวกเตอร์ \vec{TR}

(5 คะแนน)

17. กำหนดสามเหลี่ยม PQR ดังรูป



จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม PQR

(6 คะแนน)

18. จงหาอนุพันธ์ทิศทางของฟังก์ชัน $f(x, y, z) = x^2e^y + z^3$ ที่จุด $(2, 0, -1)$

โดยมีทิศทางเดียวกับ $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$

(5 คะแนน)