



ข้อสอบปลายภาค ประจำปีภาคต้น ปีการศึกษา 2557  
รายวิชา 302216 - แคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร  
รายวิชา 302221 - แคลคูลัส 3  
สอบวันที่ 17 ธันวาคม พ.ศ.2557 เวลา 17.00-20.00 น.

ชื่อ - นามสกุล ..... รหัสประจำตัว .....

คณะ ..... กลุ่ม ..... ลำดับที่ .....

**\*\*\* ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน \*\*\***

**คำชี้แจง**

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 12 หน้า (รวมหน้านี้) 18 ข้อ 90 คะแนน (คิดเป็น 45%)
2. สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการทำข้อสอบ
3. ห้ามนำกระดาษ เครื่องคำนวณและสูตรใด ๆ เข้าห้องสอบ
4. ให้เขียน รหัสประจำตัว และลำดับที่ ทุกหน้าของข้อสอบ
5. ถ้ายังไม่ได้ส่งข้อสอบ ห้ามออกจากห้องสอบไม่ว่ากรณีใดๆ
6. ทุจริตมีโทษสูงสุดตามระเบียบมหาวิทยาลัย

คะแนน (สำหรับอาจารย์)

ข้อ	1 (5)	2 (4)	3 (4)	4 (5)	5 (5)	6 (5)
คะแนน						
ข้อ	7 (5)	8 (5)	9 (5)	10 (7)	11 (4)	12 (5)
คะแนน						
ข้อ	13 (5)	14 (4)	15 (5)	16 (5)	17 (6)	18 (6)
คะแนน						

<b>302216</b>	<b>แคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร</b>	กลุ่ม 501	อาจารย์ ดร.สารัตน์ ศิลปวงษา
กลุ่ม 1	ผศ.ดร.ดวงกมล ผลเต็ม	กลุ่ม 502	อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คงสอน
กลุ่ม 2	อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คงสอน	กลุ่ม 504	อาจารย์ ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์
กลุ่ม 3	ผศ.ดร.อังคณา บุญดิเรก	<b>302221</b>	<b>แคลคูลัส 3</b>
กลุ่ม 4	ผศ.ดร.สินีนากู ศรีมงคล	กลุ่ม 1/301	อาจารย์ ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์
กลุ่ม 5	อาจารย์ ดร.สารัตน์ ศิลปวงษา	กลุ่ม 2	ผศ.ดร.ดวงกมล ผลเต็ม

## จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

1. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับ  $n = 1, 2, 3, \dots$  โดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(5 คะแนน)

2. จงเขียนเส้นโค้งระดับ  $f(x, y) = c$  ที่  $c = 0, \sqrt{8}$  ของสมการผิวโค้ง

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$$

(4 คะแนน)

3. จงหา

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y^2 - 4x}{y - 2x}$$

ตามแนวเส้นโค้ง  $y = 2x^2$

แนะนำ  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$  และ  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  (4 คะแนน)

4. กำหนด

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

จงพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน  $f(x, y)$  ในเซตของโดเมนที่เป็นจำนวนจริง (5 คะแนน)

5. จงประมาณค่าของ  $3 \ln(1.01) + e^{0.09}$  (5 คะแนน)

6. กำหนดให้  $f(u, v) = u^2v^3 + u - v$  เมื่อ  $u = \cos(\sqrt{x} + 8)$  และ  $v = \frac{x+y}{x}$

จงหา  $\frac{\partial f}{\partial x}$

(5 คะแนน)

7. กำหนดให้  $\sin(xyz) = x + 2y + 3z$  จงหา  $\frac{\partial z}{\partial x}$

(5 คะแนน)

8. กำหนดให้  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + xyz$  จงหาอนุพันธ์ทิศทางของ  $f$  ที่จุด  $(-1, 2, 0)$   
ในทิศทางของ  $\vec{v} = \langle 1, -2, 1 \rangle$  (5 คะแนน)

9. จงหาสมการระนาบสัมผัส (Tangent Plane) เส้นโค้ง

$$x^2 + y^2 + z = 4$$

ที่จุด  $(1, 1, 2)$

(5 คะแนน)

10. จงหาค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด และจุดอานม้า (ถ้ามี) ของฟังก์ชัน

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 3xy^2$$

(7 คะแนน)

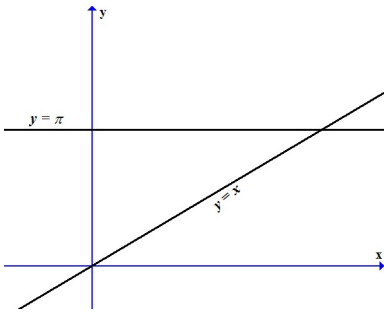
11. จงหาค่าของ  $\int_1^2 \int_0^x xy \, dy \, dx$  (4 คะแนน)

12. จงสลับลำดับการอินทิเกรตของ  $\int_0^{\frac{1}{4}} \int_{2y}^{\sqrt{y}} dx \, dy$  พร้อมทั้งวาดรูปแสดงอาณาบริเวณของการอินทิเกรต โดยไม่ต้องอินทิเกรตค่าออกมา (5 คะแนน)



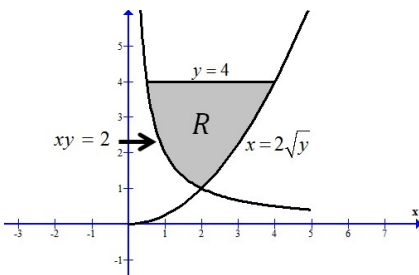
13. จงหาค่าของ  $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy dx$

(5 คะแนน)

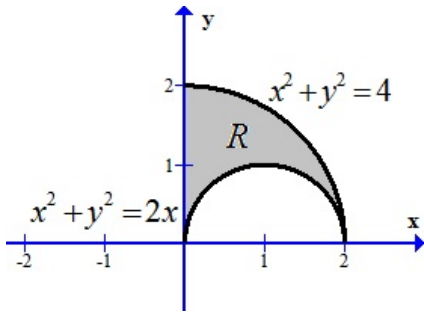


14. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นหาพื้นที่ของบริเวณ  $R$  ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $xy = 2$ ,  $x = 2\sqrt{y}$  และเส้นตรง  $y = 4$  ดังรูป โดยไม่ต้องอินทิเกรตค่าออกมา

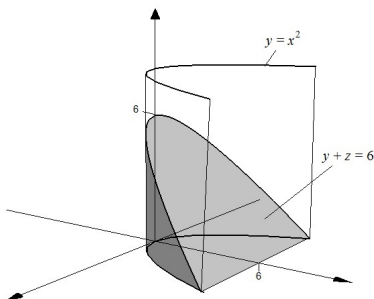
(4 คะแนน)



15. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วเพื่อหา  $\iint_R x dA$  โดยที่  $R$  คือบริเวณที่อยู่ในจตุภาคที่ 1 ภายในวงกลม  $x^2 + y^2 = 4$  และ  $x^2 + y^2 = 2x$  ดังรูป โดยไม่ต้องอินทิเกรตค่าออกมา (5 คะแนน)



16. จงใช้ปริพันธ์สามชั้นหาปริมาตรทรงตันที่ปิดล้อมด้วยผิวโค้ง  $y = x^2$  ระนาบ  $y + z = 6$  และระนาบ  $z = 0$  ดังรูป โดยไม่ต้องอินทิเกรตค่าออกมา (5 คะแนน)



17. ให้  $G$  แทนทรงตันที่อยู่ภายในทรงกลม  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  และอยู่เหนือระนาบ  $z = 1$  จงหา

$$\iiint_G \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

ในระบบพิกัดทรงกลม

(6 คะแนน)

18. จงหา  $\int_C (x + y) ds$  เมื่อ  $C$  แทนเส้นโค้ง ดังรูป

(6 คะแนน)

