



ข้อสอบปลายภาค ประจำปีภาคต้น ปีการศึกษา 2559
รายวิชา 302216 - แคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร
สอบวันที่ 1 ธันวาคม พ.ศ. 2559 เวลา 17.00-20.00 น.

ชื่อ - นามสกุล รหัสประจำตัว

คณะ กลุ่ม ลำดับที่

***** ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน *****

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 13 หน้า (รวมหน้านี้) 20 ข้อ 100 คะแนน (คิดเป็น 50%)
2. สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการทำข้อสอบ
3. ห้ามนำกระดาษ เครื่องคำนวณและสูตรใด ๆ เข้าห้องสอบ
4. ให้เขียน รหัสประจำตัว และลำดับที่ ทุกหน้าของข้อสอบ
5. ถ้ายังไม่ได้ส่งข้อสอบ ห้ามออกจากห้องสอบไม่ว่ากรณีใด ๆ
6. **ส่อทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ภาคการศึกษา**
ทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ปีการศึกษา

คะแนน (สำหรับอาจารย์)

ข้อ	1 (6)	2 (5)	3 (4)	4 (5)	5 (6)	6 (3)	7 (4)
คะแนน							
ข้อ	8 (5)	9 (5)	10 (5)	11 (5)	12 (4)	13 (7)	14 (5)
คะแนน							
ข้อ	15 (5)	16 (4)	17 (6)	18 (6)	19 (5)	20 (5)	
คะแนน							

กลุ่ม 1 ผศ.ดร.สัททยา รัตนมงคลกุล

กลุ่ม 2 ผศ.ดร.สินีนานา ศรีมงคล

กลุ่ม 3 อาจารย์ ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์

กลุ่ม 4 ผศ.ดร.ดวงกมล ผลเต็ม

กลุ่ม 5 อาจารย์ ดร.อารยา วิวัฒน์วานิช

กลุ่ม 501 อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คงสอน

กลุ่ม 502 อาจารย์ ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์

รวม

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

1. จงใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อพิสูจน์ว่า

$$3^n \geq 1 + 2n$$

สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

(6 คะแนน)

2. จงเขียนเส้นโค้งระดับ $f(x, y) = c$ ที่ $c = 1, 2$ ของสมการผิวโค้ง

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} - y^2$$

(5 คะแนน)

3. จงหา

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

(4 คะแนน)

4. จงแสดงว่า

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^2}{x^2 + y^4}$$

ไม่มีค่าเกิดขึ้น

(5 คะแนน)

5. จงใช้แบบเชิงเส้นหรือค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ $(1.05)^{18} \sqrt{3.99}$

โดยตอบเป็นทศนิยม 4 ตำแหน่ง

(6 คะแนน)

6. กำหนดให้ $f(x, y, z) = z \cos(xy)$ จงหา f_{xy} (3 คะแนน)

7. กำหนดให้ $z = f(x, y)$, $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$

ที่จุด $(x, y) = (1, 2)$ ให้ $g(u, v) = -1$, $h(u, v) = 3$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 6,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 7, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 8, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 9$$

จงหา $\frac{\partial z}{\partial u}$ ที่จุด $(x, y) = (1, 2)$

(4 คะแนน)

8. กำหนดให้ $w = xy^3z$, $x = r^2st$, $y = \cos(uv)$

$$z = \sqrt{s}, \quad u = \ln t, \quad v = e^r$$

จงหา $\frac{\partial w}{\partial t}$ ที่ $(r, s, t) = (1, 1, 1)$

(5 คะแนน)

9. กำหนดให้

$$s^2 + 5tv = \sin(wt) + u$$

จงหา $\frac{\partial v}{\partial t}$

(5 คะแนน)

10. กำหนดสมการ

$$xu + v = y$$

และ

$$2yu - xv^3 = 4x$$

จงหา $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$

(5 คะแนน)

11. กำหนดให้ $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \sin y - \sqrt{3} \cos z$ จงหาอนุพันธ์ทิศทางของ f ที่จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

ในทิศทางของ $\vec{v} = \langle 1, 1, -1 \rangle$

(5 คะแนน)

12. จงหาสมการเส้นตั้งฉากผิวโค้ง

$$x^2yz - y + z - 7 = 0$$

ที่จุด $(1, 2, 3)$

(5 คะแนน)

13. จงหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และจุดอานม้า (ถ้ามี) ของฟังก์ชัน

$$f(x, y) = x^2y - 6y^2 - 3x^2$$

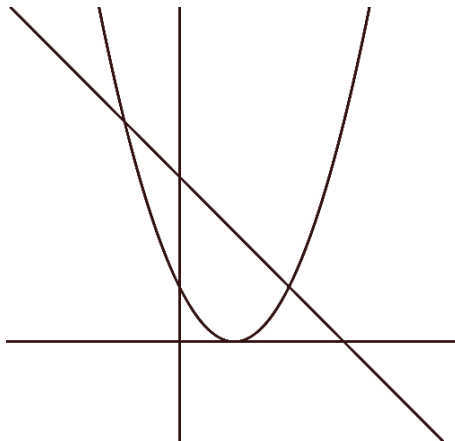
(7 คะแนน)

14. จงหาค่าของ $\iint_R (x \cos y + y \sin x) dx dy$ เมื่อ $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

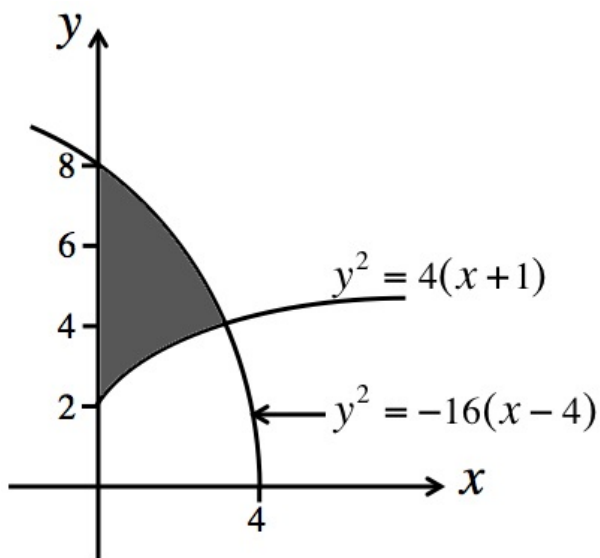
(5 คะแนน)

15. จงเขียนขีดจำกัดของปริพันธ์ $\iint_R 4x^3 dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = (x - 1)^2$ และ $y = 3 - x$ ดังรูป

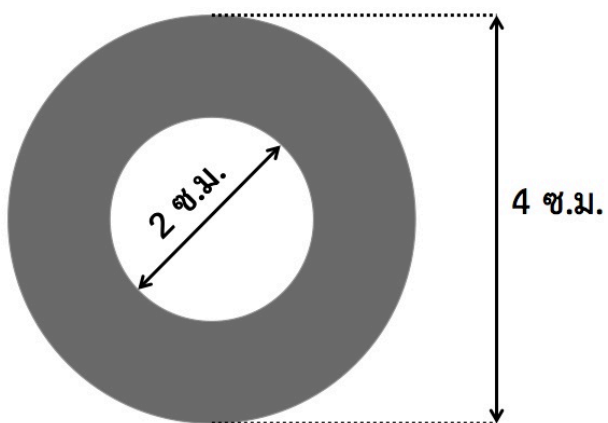
(5 คะแนน)



16. จงเขียนขีดจำกัดของปริพันธ์ $\iint_R f(x, y) dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่แรเงา ดังรูป (4 คะแนน)

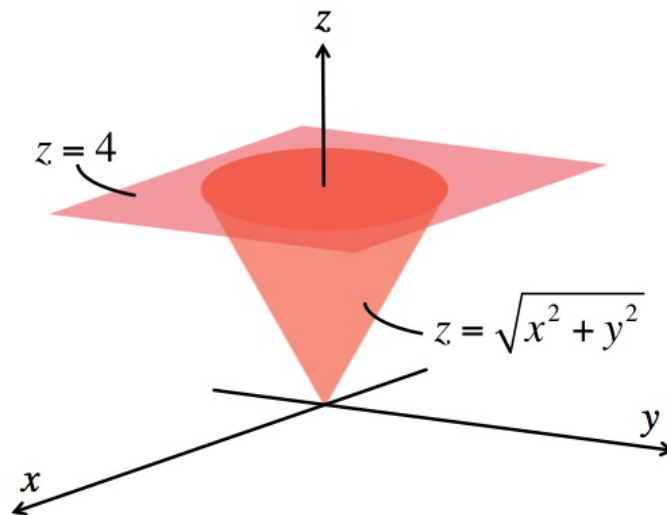


17. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว เพื่อแสดงว่าพื้นที่ของแหวนร่อน้อยกลม (บริเวณที่แรเงา) ดังรูป มีค่าเท่ากับ 3π ตารางเซนติเมตร (6 คะแนน)



18. จงหาปริมาตรทรงตัน G ที่ปิดล้อมด้วยกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ และระนาบ $z = 4$ ดังรูป

(5 คะแนน)



18.1 ในระบบพิกัดฉาก โดยไม่ต้องอินทิเกรตค่าออกมา

(3 คะแนน)

18.2 ในระบบพิกัดทรงกระบอก โดยไม่ต้องอินทิเกรตค่าออกมา

(3 คะแนน)

19. จงหาค่าของ

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx$$

ในระบบพิกัดทรงกลม

(5 คะแนน)

20. จงหา $\int_C \sqrt{x^2 + z^2} ds$ เมื่อ C แทนเส้นโค้งที่กำหนดโดย $\vec{r}(t) = \langle 0, a \cos t, a \sin t \rangle$

เมื่อ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

(5 คะแนน)