



ข้อสอบกลางภาค ประจำปีภาคต้น ปีการศึกษา 2562  
รายวิชา 30222159 - คณิตศาสตร์วิศวกรรม 3  
สอบวันที่ 17 กันยายน พ.ศ. 2562 เวลา 13.00-16.00 น.

ชื่อ - นามสกุล ..... รหัสประจำตัว .....

กลุ่ม ..... ลำดับที่ .....

**\*\*\* ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน \*\*\***

**คำชี้แจง**

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 17 หน้า (รวมหน้านี้) 20 ข้อ 90 คะแนน (คิดเป็น 45%)
2. สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการทำข้อสอบ
3. ห้ามนำกระดาษ เครื่องคำนวณและสูตรใด ๆ เข้าห้องสอบ
4. ให้เขียน รหัสประจำตัว และลำดับที่ ทุกหน้าของข้อสอบ
5. ถ้ายังไม่ได้ส่งข้อสอบ ห้ามออกจากห้องสอบไม่ว่ากรณีใด ๆ
6. **สอบทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ภาคการศึกษา**  
**ทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ปีการศึกษา**  
**ให้ผู้อื่นเข้าสอบแทน ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 2 ปีการศึกษา**

คะแนน (สำหรับอาจารย์)

ข้อ	1 (5)	2 (6)	3 (6)	4 (4)	5 (5)	6 (5)	7 (4)
คะแนน							
ข้อ	8 (5)	9 (3)	10 (6)	11 (3)	12 (2)	13 (6)	14 (6)
คะแนน							
ข้อ	15 (4)	16 (4)	17 (3)	18 (4)	19 (2)	20 (7)	
คะแนน							

กลุ่ม 1 ผศ.ดร.ดวงกมล ผลเต็ม

กลุ่ม 2 อาจารย์ ดร.อารยา วิวัฒน์วานิช

กลุ่ม 3 ผศ.ดร.สินีนานา ศรีมงคล

กลุ่ม 4 ผศ.ดร.สัททยา รัตนะมงคลกุล

กลุ่ม 5 อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คงสอน

กลุ่ม 6 อาจารย์ เสาวรส ศรีสุข

กลุ่ม 7 ผศ.ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์

รวม

## Differentiation

$$\begin{aligned}\frac{dc}{du} &= 0, \quad (c \text{ constant}) \\ \frac{d}{dx}(u \pm v) &= \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \\ \frac{d}{dx}(uv) &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{Chain Rule}) \\ \frac{d}{dx}u^n &= nu^{n-1} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}e^u &= e^u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}a^u &= a^u \ln a \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0 \\ \frac{d}{dx} \sin u &= \cos u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \cos u &= -\sin u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \tan u &= \sec^2 u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \cot u &= -\csc^2 u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \sec u &= \sec u \tan u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \csc u &= -\csc u \cot u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \sinh u &= \cosh u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \cosh u &= \sinh u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \ln u &= \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \log_a u &= \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0 \\ \frac{d}{dx} \arcsin u &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \arccos u &= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \arctan u &= \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} u &= -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} u &= \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} u &= -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}\end{aligned}$$

## Integration

$$\begin{aligned}\int du &= u + c \\ \int u dv &= uv - \int v du, \quad (\text{by part}) \\ \int u^n du &= \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1) \\ \int \frac{1}{u} du &= \ln |u| + c \\ \int e^u du &= e^u + c \\ \int a^u du &= \frac{1}{\ln a} a^u + c, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0 \\ \int \sin u du &= -\cos u + c \\ \int \cos u du &= \sin u + c \\ \int \sec^2 u du &= \tan u + c \\ \int \csc^2 u du &= -\cot u + c \\ \int \sec u \tan u du &= \sec u + c \\ \int \csc u \cot u du &= -\csc u + c \\ \int \tan u du &= -\ln |\cos u| + c \\ \int \cot u du &= \ln |\sin u| + c \\ \int \sec u du &= \ln |\sec u + \tan u| + c \\ \int \csc u du &= \ln |\csc u - \cot u| + c \\ \int \sinh u du &= \cosh u + c \\ \int \cosh u du &= \sinh u + c \\ \int \operatorname{sech}^2 u du &= \tanh u + c \\ \int \operatorname{csch}^2 u du &= -\operatorname{coth} u + c \\ \int \operatorname{sech} u \tanh u du &= -\operatorname{sech} u + c \\ \int \operatorname{csch} u \operatorname{coth} u du &= -\operatorname{csch} u + c \\ \int \frac{du}{u^2+a^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c, \quad a > 0 \\ \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} &= \arcsin \frac{u}{a} + c, \quad a > 0\end{aligned}$$

E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 10<sup>th</sup> Edition, Wiley Plus.

### จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

1. จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODE) หรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDE) พร้อมทั้งบอกอันดับ (order) ระดับชั้น (degree) และพิจารณาว่าสมการเป็นแบบเชิงเส้น (linear) หรือแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) และพิจารณาปัญหาที่กำหนดให้ว่าเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น (IVP) หรือปัญหาค่าขอบ (BVP) โดยเขียนคำตอบลงในตารางที่กำหนดให้ (5 คะแนน)

ข้อที่	สมการเชิงอนุพันธ์	ODE/PDE	อันดับ	ระดับชั้น
1.1	$xy^2 = \sqrt[3]{1 + (y')^2}$			
1.2	$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^3 = \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)^2$			

ข้อที่	สมการเชิงอนุพันธ์	เชิงเส้น/ไม่เชิงเส้น	IVP/BVP
1.3	$y^{(4)} + 3y'' + y = e^x,$ $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 2$		
1.4	$\frac{d^2 y}{dx^2} = y^2 x$ $y(0) = 2, y'(1) = 1$		

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$yx^2 dy + (x + 1)e^{y^2} dx = 0, \quad y(1) = 0$$

(6 คะแนน)

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(y \sin x + xy \cos x)dx + (x \sin x + 1)dy = 0$$

แนะนำ  $\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$  เมื่อ  $C$  เป็นค่าคงตัวใด ๆ (6 คะแนน)

4. จงหาตัวประกอบปริพันธ์ (integrating factor) ที่ทำให้สมการ

$$y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง (exact differential equation)

(4 คะแนน)

5. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' - \frac{1}{x+1}y = (x+1)e^x$$

(5 คะแนน)

6. จงหาวงค์เส้นโค้งแนววิถีเชิงตั้งฉาก (orthogonal trajectories) กับวงค์เส้นโค้ง

$$y = c \sin x$$

เมื่อ  $c$  เป็นค่าคงตัวใด ๆ

(5 คะแนน)

7. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y''' - y'' + 12y' = 0$$

เมื่อ  $y' = \frac{dy}{dx}$

(4 คะแนน)

8. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

(5 คะแนน)

9. กำหนดรากสมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์ (homogeneous equation) อันดับที่ 8 คือ

$$-1, 0, 1, 1, \pm 2i, \pm 2i$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

(3 คะแนน)



10. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 4y' + 13y = 3e^x + \sin x$$

(6 คะแนน)

11. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธ์ (nonhomogeneous equation)

$$y'' - y = xe^{-x} + e^x \sin x + 5$$

ซึ่งมีผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเอกพันธ์ (homogeneous equation)

$$y'' - y = 0$$

เป็น

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

จงหา  $y_p$  ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เอกพันธ์ข้างต้น โดยไม่ต้องหาค่าสัมประสิทธิ์ของ  $y_p$

(3 คะแนน)

12. จงเขียนสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ให้อยู่ในรูประบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$y^{(4)} - (t^2 + 4)y' = 10$$

(2 คะแนน)

13. จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

เมื่อ  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(6 คะแนน)

14. จงใช้วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก  $n$

$$3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n$$

(6 คะแนน)

15. กำหนดจุด  $A(1, 2, -3)$  และ จุด  $B(-1, 6, -3)$

15.1. จงหาขนาดของเวกเตอร์  $\overrightarrow{AB}$

(1 คะแนน)

15.2. ถ้าเวกเตอร์  $\overrightarrow{AC} = \langle 1, 0, 3 \rangle$  จงหาจุด  $C$

(2 คะแนน)

15.3. จงหา  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

(1 คะแนน)

16. กำหนดเวกเตอร์  $\vec{a} = \langle 2, 0, 0 \rangle$ ,  $\vec{b} = \langle 0, -1, 0 \rangle$  และ  $\vec{c} = \langle 1, \sqrt{3}, 0 \rangle$

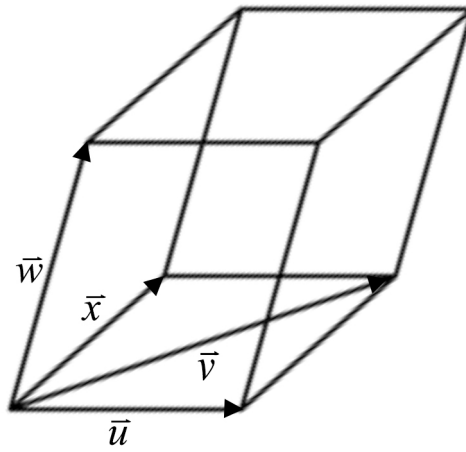
16.1. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์  $\vec{a} + \vec{b}$  (2 คะแนน)

16.2. จงหามุมระหว่างเวกเตอร์  $\vec{b}$  และ  $\vec{c}$  (2 คะแนน)

17. กำหนดให้ ภาพฉายสเกลาร์ของ  $\vec{b}$  บน  $\vec{a}$  คือ 3 และ  $\vec{b} = \langle 4, 4, -2 \rangle$   
จงหาขนาดมุมที่เวกเตอร์  $\vec{b}$  ทำกับเวกเตอร์  $\vec{a}$

(3 คะแนน)

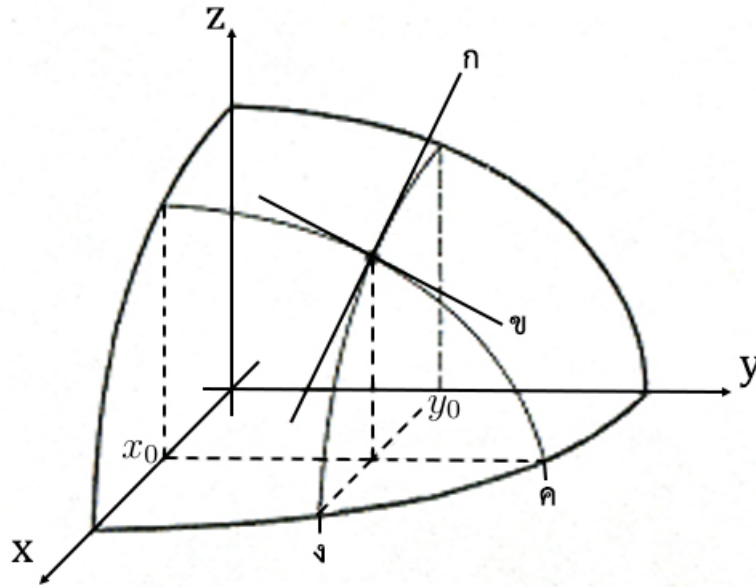
18. จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน เมื่อกำหนดเวกเตอร์  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  และ  $\vec{x}$  ดังรูป



และ  $\vec{u} = \langle 0, 5, 0 \rangle$ ,  $\vec{v} = \langle -3, 7, 2 \rangle$  และ  $\vec{w} = \langle 1, 2, 4 \rangle$

(4 คะแนน)

19. กำหนดผิวโค้ง  $z = f(x, y)$  ดังรูป



ตัวเลอกในข้อใดคือ  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

- a. เส้นตรง ก
- b. เส้นตรง ข
- c. เส้นตรง ค
- d. เส้นตรง ง
- e. ไม่มีข้อใดถูก

(2 คะแนน)

ตอบ.....



20. กำหนด  $f(x, y) = 2xe^y + \cos xy$

20.1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f(x, y)$  ที่จุด  $(2, 0)$  ในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์  $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$   
(5 คะแนน)

20.2. กำหนดเวกเตอร์

$$\vec{u}_1 = \vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{u}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{u}_3 = 2\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{u}_4 = 2\vec{i} + \vec{j}$$

เวกเตอร์ใดที่ทำให้อนุพันธ์ทิศทางของ  $f(x, y)$  ที่จุด  $(2, 0)$  (ในข้อ 20.1) มีค่าเป็นศูนย์

ตอบ.....  
(1 คะแนน)

เพราะเหตุใด

ตอบ.....  
(1 คะแนน)