



ข้อสอบปลายภาค ประจำปีภาคต้น ปีการศึกษา 2562
รายวิชา 30222159 - คณิตศาสตร์วิศวกรรม 3
สอบวันที่ 12 พฤศจิกายน พ.ศ. 2562 เวลา 13.00-16.00 น.

ชื่อ - นามสกุล รหัสประจำตัว

กลุ่ม ลำดับที่

***** ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน *****

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 19 หน้า (รวมหน้านี้) 19 ข้อ 90 คะแนน (คิดเป็น 45%)
2. สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการทำข้อสอบ
3. ห้ามนำกระดาษ เครื่องคำนวณและสูตรใด ๆ เข้าห้องสอบ
4. ให้เขียน รหัสประจำตัว และลำดับที่ ทุกหน้าของข้อสอบ
5. ถ้ายังไม่ได้ส่งข้อสอบ ห้ามออกจากห้องสอบไม่ว่ากรณีใด ๆ
6. **สอบทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ภาคการศึกษา**
ทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ปีการศึกษา
ให้ผู้อื่นเข้าสอบแทน ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 2 ปีการศึกษา

คะแนน (สำหรับอาจารย์)

ข้อ	1 (3)	2 (2)	3 (5)	4 (8)	5 (5)	6 (4)	7 (5)
คะแนน							
ข้อ	8 (4)	9 (4)	10 (5)	11 (5)	12 (5)	13 (5)	14 (5)
คะแนน							
ข้อ	15 (5)	16 (5)	17 (5)	18 (5)	19 (5)		
คะแนน							

กลุ่ม 1 ผศ.ดร.ดวงกมล ผลเต็ม

กลุ่ม 2 อาจารย์ ดร.อารยา วิวัฒน์วานิช

กลุ่ม 3 ผศ.ดร.สินีนานา ศรีมงคล

กลุ่ม 4 ผศ.ดร.สัททยา รัตนะมงคลกุล

กลุ่ม 5 อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คงสอน

กลุ่ม 6 อาจารย์ เสาวรส ศรีสุข

กลุ่ม 7 ผศ.ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์

รวม

Differentiation

$$\frac{dc}{du} = 0, \quad (c \text{ constant})$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{Chain Rule})$$

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arccot } u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arcsec } u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arccsc } u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

Integration

$$\int du = u + c$$

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (\text{by part})$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + c, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0$$

$$\int \sin u du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u du = \sin u + c$$

$$\int \sec^2 u du = \tan u + c$$

$$\int \csc^2 u du = -\cot u + c$$

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + c$$

$$\int \csc u \cot u du = -\csc u + c$$

$$\int \tan u du = -\ln |\cos u| + c$$

$$\int \cot u du = \ln |\sin u| + c$$

$$\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + c$$

$$\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + c$$

$$\int \sinh u du = \cosh u + c$$

$$\int \cosh u du = \sinh u + c$$

$$\int \text{sech}^2 u du = \tanh u + c$$

$$\int \text{csch}^2 u du = -\text{coth } u + c$$

$$\int \text{sech } u \tanh u du = -\text{sech } u + c$$

$$\int \text{csch } u \text{coth } u du = -\text{csch } u + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

1. กำหนดจุด $P_0 = (1, 2, 0)$ และ $\vec{v} = \langle 0, 1, 1 \rangle$ จงหาสมการเส้นตรงแบบอิงตัวแปรเสริมและแบบสมมาตรที่ผ่านจุด P_0 และมีทิศทางเดียวกับ \vec{v}

(3 คะแนน)

2. กำหนดจุด $P_0 = (1, -1, 3)$ และ $\vec{n} = \langle 1, 0, 4 \rangle$ จงหาสมการระนาบที่มีจุด P_0 อยู่บนระนาบและ \vec{n} เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกับระนาบ

(2 คะแนน)

3. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $P(1, 0, 3)$ และมีเส้นตรง

$$x = 1, y = t, z = -2 - t, t \in \mathbb{R}$$

อยู่บนระนาบ

(5 คะแนน)

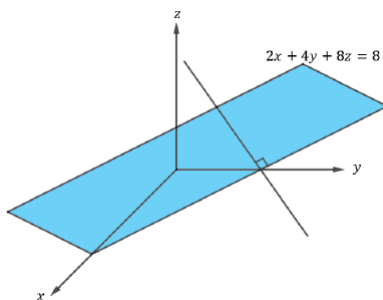
4. กำหนดระนาบ $P_1 : 2x + 4y + 8z = 8$

4.1. จงหาสมการระนาบที่สัมผัสทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ และขนานกับระนาบ P_1

(3 คะแนน)

4.2. จงหาสมการเส้นตรงที่อยู่บนระนาบ P_1 ซึ่งตั้งฉากกับรอยตัดระหว่างระนาบ P_1 กับระนาบ xy ที่จุด $(0, 2, 0)$

(5 คะแนน)



5. จงวาดกราฟต่อไปนี้ ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ พร้อมระบุจุดตัดแกนลงบนกราฟ

5.1. $y = 2x$

(2 คะแนน)

5.2. $z = -x^2 + 1$

(3 คะแนน)

6. กำหนดให้สมการพื้นผิวคือ

$$2x^2 + y^2 - 4z^2 + 16z - 1 = 0$$

6.1. จงบอกชื่อกราฟ (1 คะแนน)

.....

6.2. จงบอกชื่อกราฟของรอยตัดพื้นผิวบนระนาบ xy (1 คะแนน)

.....

6.3. จงบอกชื่อกราฟของรอยตัดพื้นผิวบนระนาบ xz (1 คะแนน)

.....

6.4. จงบอกชื่อกราฟของรอยตัดพื้นผิวบนระนาบ yz (1 คะแนน)

.....

7. จงจับคู่สมการที่สอดคล้องกับภาพผิวโค้งกำลังสองต่อไปนี้ โดยนำคำตอบ (a) ถึง (h) ไปตอบใต้ภาพ

(5 คะแนน)

(a) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

(c) $2y^2 - \frac{x^2}{4} + z^2 = 1$

(e) $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(g) $2x + z = 3$

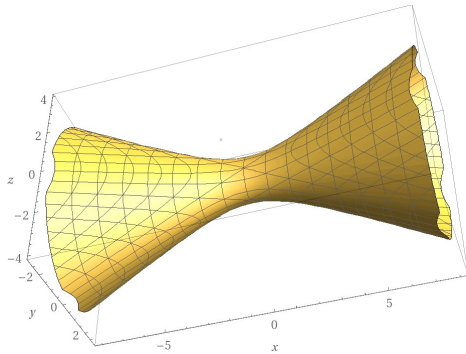
(b) $z = x^2 - 2y^2$

(d) $5z^2 - x^2 - 4y^2 = 1$

(f) $2x^2 + z^2 = -y + 1$

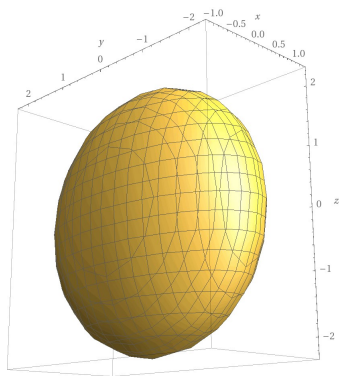
(h) $z = 5$

7.1



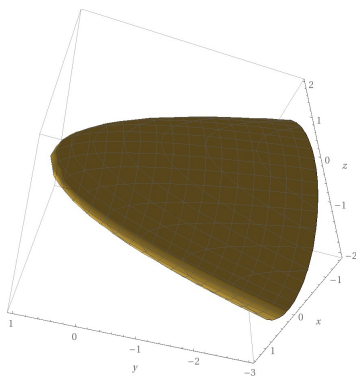
คำตอบ.....

7.3



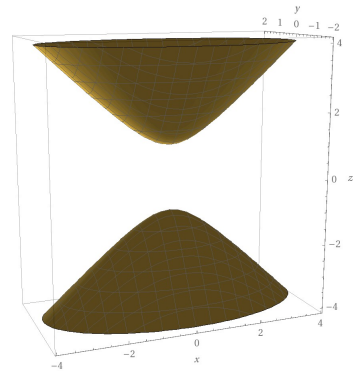
คำตอบ.....

7.5



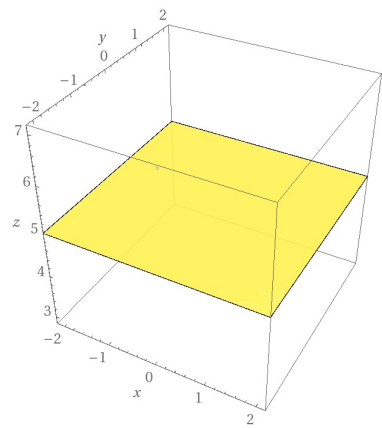
คำตอบ.....

7.2



คำตอบ.....

7.4



คำตอบ.....

8. กำหนดฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = \langle 4 - t^2, 4t + t^2 \rangle$

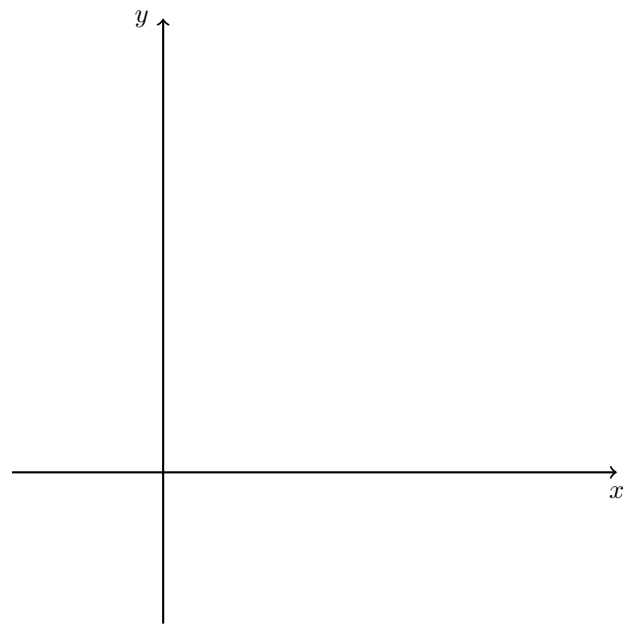
8.1. จงวาดเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดยเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}(t)$ เมื่อ $-2 \leq t \leq 2$ พร้อมทั้งแสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของเส้นโค้ง

8.2. จงวาดเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}(1)$

โดยวาดลงบนแกนพิกัดที่กำหนดให้

(4 คะแนน)

t	-2	-1	0	1	2
x					
y					



9. กำหนดฟังก์ชันเวกเตอร์

$$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{e^t - 1}{\sin 2t}, t^3, \ln(5t + 1) \right\rangle$$

จงหา $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t)$

(4 คะแนน)

10. กำหนดฟังก์ชันเวกเตอร์

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + t^2\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k}$$

จงหา

10.1. $\vec{r}'(t)$

(2 คะแนน)

10.2. $\vec{r}'(0)$

(1 คะแนน)

10.3. $\int_0^1 \vec{r}(t) dt$

(2 คะแนน)

11. กำหนดฟังก์ชันเวกเตอร์

$$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{t^2}{2}, 1, t^2 + 1 \right\rangle$$

จงหาความยาวส่วนโค้งที่กำหนดโดยฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ จากจุด $(0, 1, 1)$ ไปยังจุด $(2, 1, 5)$

(5 คะแนน)

12. วัตถุเคลื่อนที่มีความเร่งเป็น $\vec{a}(t) = \langle 1 - t, 2, e^t \rangle$ และมีความเร็วเริ่มต้นเป็น $\vec{v}(0) = \langle 1, 1, 1 \rangle$
จงหาความเร็ว ณ เวลา t

(5 คะแนน)

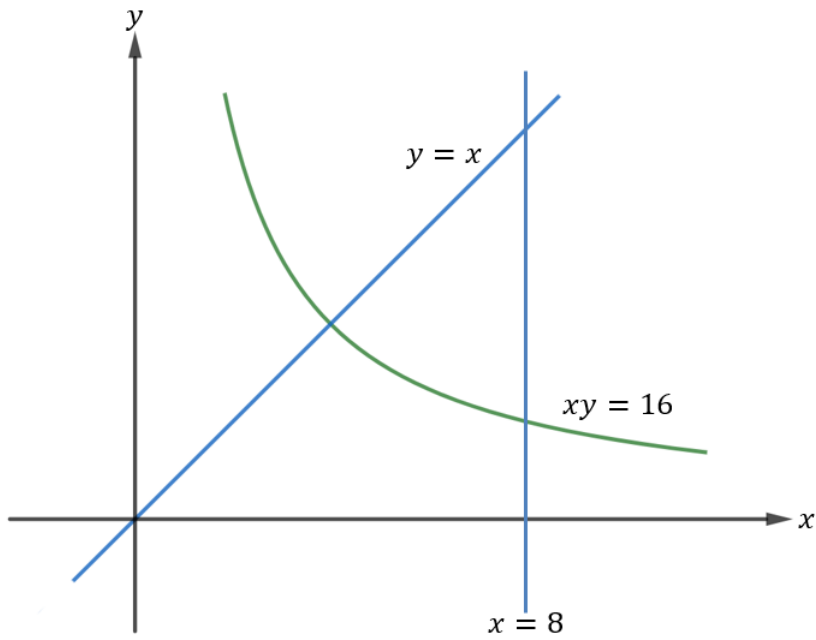
13. จงหาค่าของ $\int_0^3 \int_{2x}^6 \sqrt{y^2 + 2} dy dx$

(5 คะแนน)

14. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นเพื่อหาพื้นที่บริเวณ R

เมื่อ R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย $xy = 16$, $y = x$, $y = 0$ และ $x = 8$ ดังรูป

(5 คะแนน)

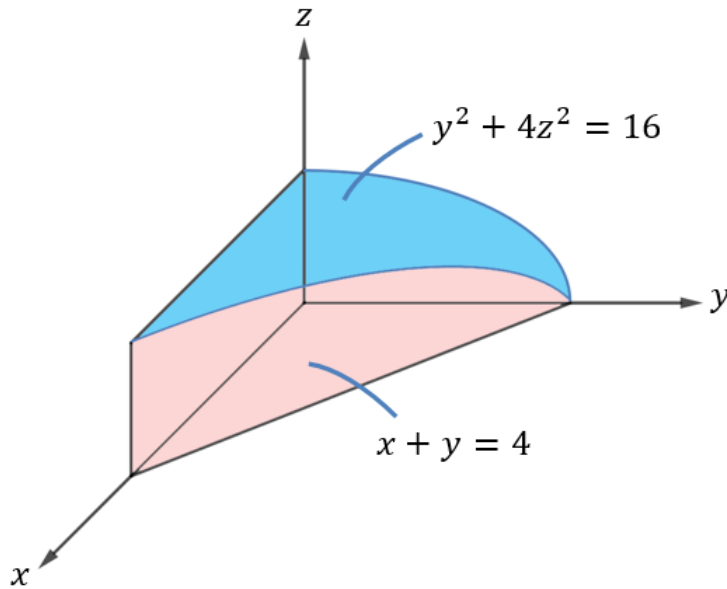


15. จงใช้ปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉากเพื่อหาขีดจำกัดของปริพันธ์

$$\iiint_G f(x, y, z) dz dy dx$$

เมื่อรูปทรงตัน G ถูกปิดล้อมด้วยระนาบ $x + y = 4$ และทรงกระบอก $y^2 + 4z^2 = 16$ ดังรูป

(5 คะแนน)

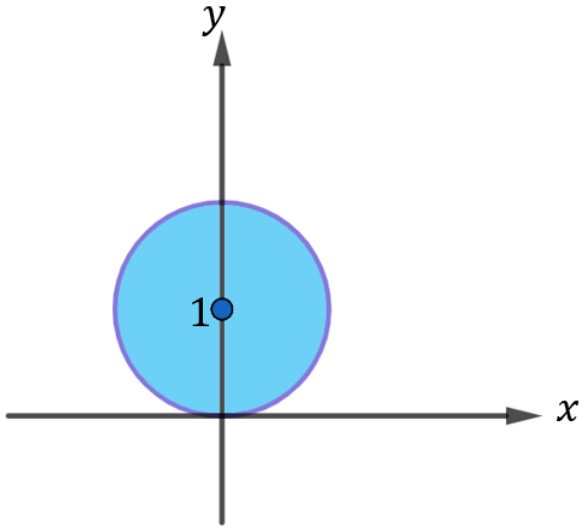


16. จงใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วเพื่อหาขีดจำกัดของปริพันธ์

$$\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2} dA$$

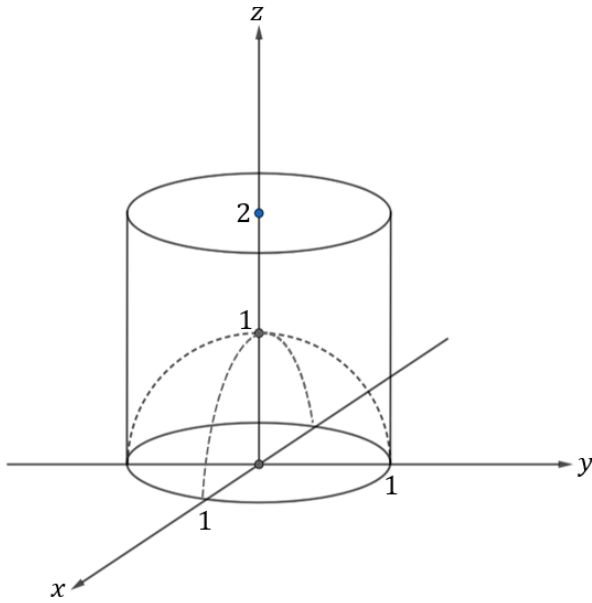
เมื่อ R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ดังรูป

(5 คะแนน)



17. จงใช้ปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอกเพื่อหาปริมาตรทรงตัน G ที่ถูกปิดด้านบนด้วยระนาบ $z = 2$ ปิดด้านล่างด้วยพาราโบลอยด์ $z = 1 - (x^2 + y^2)$ และปิดด้านข้างด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ ดังรูป

(5 คะแนน)



18. จงใช้ระบบพิกัดทรงกลมเพื่อหาขีดจำกัดของปริพันธ์

$$\iiint_G \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

เมื่อ G เป็นส่วนตัดครึ่งบนของทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ และ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ดังรูป

(5 คะแนน)

19. จงหาปริพันธ์บนเส้น

$$\int_C 2x \, ds$$

เมื่อ C เป็นส่วนของเส้นโค้งที่มีสมการเป็น $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$ เมื่อ $1 \leq t \leq 3$

(5 คะแนน)