งานวิจัย : An Effective Method for Finding Special Solution of Nonlinear Differential Equations with Variable Coefficients
ผู้แต่ง : Maochan Qin และ Guihong Fan
วารสาร : Physics Letters A ปีที่ 2008 ฉบับที่ 372 หน้าที่ 3240 - 3242
ผู้เรียบเรียง : น.ส.ธัญญารัตน์ อุปพงษ์ รหัส 58030334
ที่ปรึกษา : ผศ. ดร.ดวงกมล ผลเต็ม

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีการที่มีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยแบบพิเศษ (Special solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear differential equation) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร โดยการนำสมการแบร์นูลลี (Bernoulli equation) มาประยุกต์เพื่อช่วยหาผลเฉลยแบบพิเศษของสมการที่ศึกษา

Keywords: Special solution; Nonlinear differential equations; Variable coefficients

บทนำ

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n-k}(x)\frac{d^k y}{dx^k} + a_n(x)y + b(x)y^m = 0 \tag{1}$$

เมื่อ $a_i(x), i = 1, 2, ..., n$ และ $b(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ m เป็นค่าคงที่ โดยที่ $m \neq 0, 1$ เพื่อที่จะหาผลเฉลยแบบพิเศษของสมการ (1) ซึ่งสอดคล้องกับผลเฉลยสมการแบร์นูลลี (Koulouglioti, Cole, & Kitzman, 2009)

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^{\alpha} + c(x)y \tag{2}$$

เมื่อ $a(x)$ และ $c(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จะต้องหาค่า และ $\alpha \neq 0, 1$ แทนสมการ (2) ลงในสมการ (1) และจัดรูปสมการในตัวแปร y ยกกำลังเดียวกัน แล้วจัดให้ค่าสัมประสิทธิ์เท่ากับศูนย์เพื่อดำเนินหาค่าของฟังก์ชัน $a(x)$ และ $c(x)$

วิธีการ

งานวิจัยนี้สนใจที่จะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร
จากสมการ (1) แทน $n = 2$ จะได้

$$a_0(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y + b(x)y^m = 0 \tag{3}$$

แทนสมการ (2) ลงใน สมการ (3) จะได้

$$\begin{aligned} \alpha a_0(x)a^2(x)y^{2\alpha-1} + (a_0(x)(a'(x) + (\alpha+1)a(x)c(x)) + a_1(x)a(x))y^{\alpha} & \\ +(a_0(x)(c'(x) + c^2(x)) + a_1(x)c(x) + a_2(x))y + b(x)y^m & = 0 \end{aligned}$$

แทน $2\alpha - 1 = m$ และจัดให้สัมประสิทธิ์ของ y^m, $y^{\frac{m+1}{2}}$ และ y เท่ากับศูนย์จะได้

$$\begin{aligned} &\tfrac{m+1}{2}a_0(x)a^2(x) + b(x) = 0, \\ &a_0(x)(a'(x) + \tfrac{m+3}{2}a(x)c(x)) + a_1(x)a(x) = 0, \\ &a_0(x)(c'(x) + c^2(x)) + a_1(x)c(x) + a_2(x) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ตามลำดับ กล่าวคือถ้าฟังก์ชัน $a(x)$ และ $c(x)$ สอดคล้องกับสมการ (4) แล้วสมการ (3) จะมีผลเฉลยแบบพิเศษซึ่งสอดคล้องกับสมการแบร์นูลลีต่อไปนี้ (พัฒนี อุดมกะวานิช, 2560)

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^{\frac{m+1}{2}} + c(x)y$$

ผลที่ได้รับ

งานวิจัยนี้นำสมการแบร์นูลลีมาประยุกต์เพื่อช่วยหาผลเฉลยแบบพิเศษของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น โดยแสดงเป็นตัวอย่างทั้งหมด 3 ตัวอย่าง ได้แก่

1. สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับสอง

$$y'' - \frac{(m+5)x+2}{2(x+1)x}y' + \frac{(m+5)x+2}{2(x+1)^2x}y - \frac{m+1}{2}x^2y^m = 0$$

มีผลเฉลย คือ $y^{\frac{1-m}{2}} = \frac{1-m}{m+3}(x+1)^2 - \frac{(1-m)}{m+1}(x+1) + \frac{1-m}{2}(x+1)^{\frac{1-m}{2}}c, \qquad m \neq \pm 1, m \neq \pm 3$

2. สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับสาม

$$\begin{aligned} y''' - \frac{(m+3)x+2}{x^2}y'' + \left(\frac{(m+8)((m+3)x+2)}{3x^3} - \frac{(m+2)(m+5)}{9x^2}\right) & \\ - \left(\frac{(m+8)((m+3)x+2)}{3x^4} - \frac{(m+2)(m+5)}{9x^3}\right)y - \frac{(2m+1)(m+2)}{9}x^3y^m &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้สมการแบร์นูลลีที่สอดคล้องกับสมการนี้ คือ $\frac{dx}{dy} - \frac{(mx+2)}{(m+2)x^2}y = xy^{\frac{m+2}{3}}$ สามารถนำไปหาผลเฉลยต่อไป (Boyce, 2005)

3. Korteveg-deVries-Burgers equation

$$u_t - \beta u^\delta u_x + \gamma u_{xxx} = \kappa u_{xxx} \tag{5}$$

มีผลเฉลย คือ $u(x,t) = \left(c_1 \text{exp}\left(-\frac{\kappa\delta}{\gamma(\delta+4)}\left(x + \frac{2\kappa^2(\delta+2)t}{\gamma(\delta+4)^2}\right)\right) \pm \frac{\delta+4}{\kappa}\sqrt{\frac{\beta\gamma}{2(\delta+1)(\delta+2)}}\right)^{-2/\delta}$

หนังสืออ้างอิง

พัฒนี อุดมกะวานิช. (2560). *ทฤษฎีรหัส (Coding Theory)* (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพ ฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Kouloglioti, C., Cole., R., & Kitzman, H. (2009). The role of children's routines of daily living, supervision, and maternal fatigue in preschool children's injury risk. *Research in Nursing & Health, 32*, 517-529.

————————————————	————————————————
(นางสาวธัญญารัตน์ อุปพงษ์)	(ผศ. ดร.ดวงกมล ผลเต็ม)
นิสิต	อาจารย์ที่ปรึกษา