

งานวิจัย	:	ผลบวกปริศนากับผลพลอยได้ที่น่าสนใจ (A Curious Sum with Interesting Dividends)
ผู้แต่ง	:	Thomas Koshy
วารสาร	:	Mathematics Teacher ปีที่ 102 ฉบับที่ 1 หน้า 76 - 78
ผู้เรียบเรียง	:	น.ส.ณัฐธิดา นามประดิษฐ์ รหัส 52031227
ที่ปรึกษา	:	ผศ. ดร.อรณพ แก้วขาว

### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้หาสูตรทั่วไปสำหรับคำนวณค่าของ  $\sum_{r=1}^n \lfloor \lg r \rfloor$  และ  $\sum_{r=1}^n \lceil \lg r \rceil$

**Keywords:** finite sum, floor function, ceiling function

### บทนำ

จากปัญหาข้อที่ 26 ใน [1] ที่ให้คำนวณค่าของ  $\sum_{r=1}^{1024} \lfloor \lg r \rfloor$  เมื่อ  $\lg x = \log_2 x$  และ  $\lfloor x \rfloor$  คือ ฟังก์ชันพื้น (floor function) ของ  $x$  ทำให้ผู้เขียนเกิดแรงจูงใจในการหาสูตรทั่วไปสำหรับ  $\sum_{r=1}^n \lfloor \lg r \rfloor$  และ  $\sum_{r=1}^n \lceil \lg r \rceil$  เมื่อ  $\lceil x \rceil$  คือ ฟังก์ชันเพดาน (ceiling function) ของ  $x$

### วิธีการ

พิจารณา  $S_n = \sum_{i=1}^n i \cdot 2^i$  จากการสังเกตรูปแบบของ  $S_1, S_2, \dots, S_8$  พบว่า

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2 \quad (1)$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ด้วยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ว่าเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง  $n \geq 1$

สมการ (1) สามารถนำไปใช้ในการหาสูตรทั่วไปสำหรับ  $\sum_{r=1}^n \lfloor \lg r \rfloor$  โดยแยกการพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่  $n$  เป็นจำนวน mersenne (จำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูป  $2^m - 1$ , สำหรับบางจำนวนเต็ม  $m$ ) และ  $n$  ไม่เป็นจำนวน mersenne

ส่วนการหาสูตรทั่วไปสำหรับ  $\sum_{r=1}^n \lceil \lg r \rceil$  จะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่  $n$  เป็นกำลังของ 2 และ  $n$  ไม่เป็นกำลังของ 2 ซึ่งต้องอาศัยสมการ (1) เช่นเดียวกัน

### ผลที่ได้รับ

$$\sum_{r=1}^n \lfloor \lg r \rfloor = \begin{cases} (n+1)[\lg(n+1)-2] + 2, & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวน mersenne} \\ (n+1)\lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 2, & \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

$$\sum_{r=1}^n \lceil \lg r \rceil = \begin{cases} n(\lfloor \lg n \rfloor - 1) + 1, & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นกำลังของ } 2 \\ n\lceil \lg n \rceil - 2^{\lceil \lg n \rceil} + 1, & \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$



รูปที่ 1 คำบรรยายรูปภาพ (ถ้ามี)


ตารางที่ 1 คำบรรยายตาราง (ถ้ามี)

## References

- [1] ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน. (พิมพ์ครั้งที่ 10). กรุงเทพฯ : บริษัทนามมีบุ๊คส์พับลิเคชั่นส์จำกัด.
- [2] Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2005). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (8<sup>th</sup> ed.). John Wiley & Son.

-----  
(นางสาวณัฏฐนิชา นามประดิษฐ์)  
ลงชื่อนิสิต

-----  
(ผศ. ดร.อรณพ แก้วขาว)  
ลงชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา