



ข้อสอบปลายภาค ประจำปีภาคต้น ปีการศึกษา 2565
 รายวิชา 30222164 - คณิตศาสตร์วิศวกรรม 3
 สอบวันที่ 24 ตุลาคม พ.ศ. 2565 เวลา 9.00-12.00 น.

ชื่อ - นามสกุล รหัสประจำตัว

กลุ่ม ลำดับที่

***** ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน *****

คำชี้แจง

- ข้อสอบมีทั้งหมด 18 หน้า (รวมหน้านี้) 15 ข้อ 90 คะแนน (คิดเป็น 45%)
 ข้อที่ 16 เป็นข้อที่ให้คะแนนพิเศษ 10 คะแนน (คิดเป็น 5%)
- สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการทำข้อสอบ
- ไม่อนุญาตให้นำเครื่องคิดเลขและเอกสารใด ๆ เข้าห้องสอบ
 ยกเว้น กระดาษขนาดไม่เกิน A4 ที่จดเนื้อหาของรายวิชาด้วยลายมือตนเอง
- ให้เขียน รหัสประจำตัว และลำดับที่ ทุกหน้าของข้อสอบ
- หากยังไม่ได้ส่งข้อสอบ ห้ามออกจากห้องสอบไม่ว่ากรณีใด ๆ
- สอบทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ภาคการศึกษา
 ทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ปีการศึกษา
 ให้ผู้อื่นเข้าสอบแทน ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 2 ปีการศึกษา

คะแนน (สำหรับอาจารย์)

ข้อ	1 (4)	2 (6)	3 (2)	4 (5)	5 (7)	6 (7)
คะแนน						
ข้อ	7 (2)	8 (11)	9 (5)	10 (15)	11 (6)	12 (8)
คะแนน						
ข้อ	13 (6)	14 (2)	15 (4)	ข้อพิเศษ 16 (10)	รวมคะแนน ข้อ 1-15 (90)	
คะแนน						

กลุ่ม 1 ผศ.ดร.ดวงกมล ผลเต็ม

กลุ่ม 2 ผศ.ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์

กลุ่ม 3 ผศ.ดร.สัททยา รัตนะมงคลกุล

กลุ่ม 4 ผศ.เสาวรส ศรีสุข

กลุ่ม 5 ดร.จุฑารัตน์ คงสอน

กลุ่ม 6 ผศ.ดร.สินีนากู ศรีมงคล

Differentiation

$$\frac{dc}{du} = 0, \quad (c \text{ constant})$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{Chain Rule})$$

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arccot } u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arcsec } u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \text{arccsc } u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

Integration

$$\int du = u + c$$

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (\text{by part})$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + c, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0$$

$$\int \sin u du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u du = \sin u + c$$

$$\int \sec^2 u du = \tan u + c$$

$$\int \csc^2 u du = -\cot u + c$$

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + c$$

$$\int \csc u \cot u du = -\csc u + c$$

$$\int \tan u du = -\ln |\cos u| + c$$

$$\int \cot u du = \ln |\sin u| + c$$

$$\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + c$$

$$\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + c$$

$$\int \sinh u du = \cosh u + c$$

$$\int \cosh u du = \sinh u + c$$

$$\int \text{sech}^2 u du = \tanh u + c$$

$$\int \text{csch}^2 u du = -\text{coth } u + c$$

$$\int \text{sech } u \tanh u du = -\text{sech } u + c$$

$$\int \text{csch } u \text{coth } u du = -\text{csch } u + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

ตารางผลการแปลงลาปลาซ

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. \sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	12. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
13. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	14. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
15. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	16. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
17. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	18. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
19. $t^n e^{at}, n=1,2,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	20. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
21. $u_c(t) = u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	22. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
23. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	24. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
25. $t^n f(t), n=1,2,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	25. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
27. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	28. $f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
29. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 18y' + 81y = 0$$

(4 คะแนน)

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 6y' - 7y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

(6 คะแนน)

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์อันดับ 4 ซึ่งมีรากของสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) คือ

$$1, 1, 3 - 2i, 3 + 2i$$

(2 คะแนน)

4. จงหาผลเฉลยทั่วไป ($y = y_c + y_p$) ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + 100y = x \sin(10x) - e^x \cos(10x)$$

โดยไม่ต้องคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ y_p

(5 คะแนน)

5. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + 3y' = 3e^{2x}$$

เมื่อกำหนดให้ $y_c = c_1 + c_2e^{-3x}$

(7 คะแนน)

6. จงหาผลการแปลงฟูรีเยร์ (Fourier transform) ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

(7 คะแนน)

7. จงเขียนฟังก์ชัน $f(t)$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของ Heaviside function ($u_c(t)$)

$$f(t) = \begin{cases} -2, & t < 1 \\ 7, & 1 \leq t < 5 \\ t, & t \geq 5 \end{cases}$$

(2 คะแนน)

8. จงหาผลการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ของฟังก์ชันต่อไปนี้

8.1. $f(t) = \sin(10t)$

(2 คะแนน)

8.2. $g(t) = \frac{1}{5}e^{3t}$

(2 คะแนน)

8.3. $h(t) = 4t^3 - 8e^{5t} \cosh(2t)$

(2 คะแนน)

8.4. $h(t) = 15u_1(t) + (t - 2)u_{10}(t)$

(5 คะแนน)

9. จงใช้ปริพันธ์สังวัตนาการ (Convolution integral) เพื่อหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชัน

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)(s-2)}$$

(5 คะแนน)

10. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันฟังก์ชันต่อไปนี้

$$10.1. F(s) = \frac{4}{s} - \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s^2+4}$$

(3 คะแนน)

$$10.2. G(s) = \frac{s-2}{s^2+2s-5}$$

(4 คะแนน)

$$10.3. G(s) = \frac{e^{-4s}}{s^2+9}$$

(3 คะแนน)

$$10.4. H(s) = \frac{6s^2 + 4s + 4}{s^2(s + 2)}$$

(5 คะแนน)

11. จงใช้การแปลงลาปลาซ เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$$

(6 คะแนน)

12. จงใช้การแปลงลาปลาซ เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - y = 2u_1(t) - u_3(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$$

แนะนำ

$$\frac{1}{s(s^2 - 1)} = -\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 - 1}$$

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$$

(8 คะแนน)

13. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

- 13.1. จงหาว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยต่อไปนี้มีอันดับ (order) เป็นเท่าใด มีสมบัติเป็นเชิงเส้น (linear) หรือไม่เชิงเส้น (nonlinear) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเอกพันธ์ (homogeneous) หรือไม่เอกพันธ์ (nonhomogeneous)

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	อันดับ	linear หรือ nonlinear	homo. หรือ nonhomo.
$u_{xxy}^2 + u_{yy} = e^{xy}$			
$u_{xx} + u_x - 5u_t = u$			
$u_{tt} - 2u_{xx} + u_{xt} = \cos u$			

- 13.2. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ข้อ (a) (b) และ (c) ข้อใดบ้างที่เป็นสมการอนุพันธ์ย่อยคล้ายเชิงเส้น (quasilinear) ข้อใดบ้างที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกึ่งเชิงเส้น (semilinear)

(a) $uu_{xxy} - u^2u_y = 2 \ln(t + x)$

(b) $xu_{xx} + u_x + u_{xt} = \sin u$

(c) $u_{tt}^2 + u_{xx} + u_{xt} = 0$

สมการอนุพันธ์ย่อยคล้ายเชิงเส้น (quasilinear) คือข้อ.....

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกึ่งเชิงเส้น (semilinear) คือข้อ.....

(6 คะแนน)

14. จงตรวจสอบว่า $u(x, t) = \sin(x - ct)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

หรือไม่ เพราะเหตุใด

(2 คะแนน)

15. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$u_{yx} = e^{2x}$$

(4 คะแนน)

16. (คะแนนพิเศษ) จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$u_t - 2u_x = u, \quad u(x, 0) = e^x$$

(10 คะแนน)

ข้อที่ 16. (ต่อ)