



ข้อสอบกลางภาค ประจำภาคต้น ปีการศึกษา 2566
รายวิชา 30222164 - คณิตศาสตร์วิศวกรรม 3
สอบวันที่ 28 สิงหาคม พ.ศ. 2566 เวลา 9.00-12.00 น.

ชื่อ - นามสกุล รหัสประจำตัว

กลุ่ม ลำดับที่

***** ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน *****

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 17 หน้า (รวมหน้านี้) 20 ข้อ 90 คะแนน (คิดเป็น 45%)
2. สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการทำข้อสอบ
3. ไม่อนุญาตให้นำเครื่องคิดเลขและเอกสารใด ๆ เข้าห้องสอบ ยกเว้นกระดาษขนาดไม่เกิน A4 ที่จดเนื้อหาของรายวิชาด้วยลายมือตนเอง
4. ให้เขียน รหัสประจำตัว และลำดับที่ ทุกหน้าของข้อสอบ
5. หากยังไม่ได้ส่งข้อสอบ ห้ามออกจากห้องสอบไม่ว่ากรณีใด ๆ
6. **ส่งทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ภาคการศึกษา**
ทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ปีการศึกษา
ให้ผู้อื่นเข้าสอบแทน ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 2 ปีการศึกษา

คะแนน (สำหรับอาจารย์)

ข้อ	1 (3)	2 (2)	3 (5)	4 (4)	5 (4)	6 (4)	7 (4)
คะแนน							
ข้อ	8 (4)	9 (4)	10 (5)	11 (5)	12 (8)	13 (5)	14 (5)
คะแนน							
ข้อ	15 (3)	16 (5)	17 (5)	18 (5)	19 (5)	20 (5)	รวม (90)
คะแนน							

กลุ่ม 2 ผศ.ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์ กลุ่ม 5 ผศ.ดร.จุฑารัตน์ คงสอน
กลุ่ม 3 ผศ.ดร.สหทัย รัตนะมงคลกุล กลุ่ม 6 ผศ.ดร.สินีนานู ศรีมงคล
กลุ่ม 4 ผศ.เสาวรส ศรีสุข กลุ่ม 7 ผศ.ดร.ลี ศาสนพิทักษ์

Differentiation

$$\frac{dc}{du} = 0, \quad (c \text{ constant})$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{Chain Rule})$$

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

Integration

$$\int du = u + c$$

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (\text{by part})$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + c, \quad a \neq 1 \text{ and } a > 0$$

$$\int \sin u du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u du = \sin u + c$$

$$\int \sec^2 u du = \tan u + c$$

$$\int \csc^2 u du = -\cot u + c$$

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + c$$

$$\int \csc u \cot u du = -\csc u + c$$

$$\int \tan u du = -\ln |\cos u| + c$$

$$\int \cot u du = \ln |\sin u| + c$$

$$\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + c$$

$$\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + c$$

$$\int \sinh u du = \cosh u + c$$

$$\int \cosh u du = \sinh u + c$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + c$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u du = -\operatorname{coth} u + c$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + c$$

$$\int \operatorname{csch} u \operatorname{coth} u du = -\operatorname{csch} u + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

1. กำหนดลำดับ $\left\{ \frac{3n-1}{3^n} \right\}$ จงตรวจสอบว่าลำดับนี้ **ลู่เข้าหรือลู่ออก** (3 คะแนน)

2. กำหนดลำดับ $\left\{ \frac{(-7)^n}{3^{n+1}} \right\}$ จงตรวจสอบว่าลำดับนี้ **ลู่เข้าหรือลู่ออก** (2 คะแนน)

3. จงหาลำดับของผลบวกย่อย n พจน์ ($\{S_n\}$) ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n+2}} - \frac{2}{\sqrt{n+4}} \right)$$

และตรวจสอบว่าอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าอนุกรมจะลู่เข้าสู่ค่าใด

(5 คะแนน)

จงตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมในข้อ 4 - 9 โดยใช้

การทดสอบการลู่ออก (Divergence Test) หรือ

การทดสอบแบบเปรียบเทียบ (Comparison Test) หรือ

การทดสอบแบบเปรียบเทียบลิมิต (Limit Comparison Test) หรือ

การทดสอบโดยใช้ปริพันธ์ (Integral Test) หรือ

การทดสอบแบบอัตราส่วน (Ratio Test) หรือ

การทดสอบโดยรากที่ n (n^{th} Root Test)

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{-3n}}$

(4 คะแนน)

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^5 + 3n + 4}$$

(4 คะแนน)

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{9n}}{n^{2n}}$$

(4 คะแนน)

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n^3}$$

(4 คะแนน)

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{n+1}}$$

(4 คะแนน)

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(\ln n)^4}$

(4 คะแนน)

10. จงตรวจสอบว่าอนุกรม

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{14} - \frac{1}{19} + \frac{1}{24} - \frac{1}{29} + \dots$$

เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

(5 คะแนน)

11. จงตรวจสอบว่าอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+4}{3^n} \right)$$

เป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

(5 คะแนน)

12. จงหาช่วงการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^{n+1}}{5^n}$

(8 คะแนน)

13. จงกระจายฟังก์ชัน

$$f(x) = e^{1-3x}$$

ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) รอบจุด $x = \frac{1}{3}$

โดยกระจายให้มียังน้อย 4 พจน์แรกที่ไม่เป็นศูนย์

(5 คะแนน)

14. กำหนดอนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier Series) ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi x, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{และ}$$

เมื่อคาบของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ 2π

ให้อนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier Series) ของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

จงหาค่าสัมประสิทธิ์ b_n

(5 คะแนน)

15. จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODE) หรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDE) พร้อมทั้งบอกอันดับ (order) ระดับชั้น (degree) และพิจารณาว่าสมการเป็นแบบเชิงเส้น (linear) หรือแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ (homogeneous) หรือสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เอกพันธ์ (nonhomogeneous) และพิจารณาว่าปัญหาที่กำหนดให้เป็นปัญหาค่าเริ่มต้น (IVP) หรือปัญหาค่าขอบ (BVP) โดยเขียนคำตอบลงในตารางที่กำหนดให้ (3 คะแนน)

ข้อที่	สมการเชิงอนุพันธ์	ODE/PDE	อันดับ	ระดับชั้น
(1)	$x \left(\frac{d^3y}{dt^3} \right)^2 = xy^4$			
(2)	$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^4 = \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x}$			

ข้อที่	สมการเชิงอนุพันธ์	เชิงเส้น/ไม่เชิงเส้น	เอกพันธ์/ไม่เอกพันธ์	IVP/BVP
(3)	$y^{(3)} + 3y' + xy = \sin^2 x$ $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 3$			
(4)	$\frac{d^2y}{dx^2} = x^2y$ $y(0) = 1, y'(4) = 3$			

16. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{1 - y^2}, \quad y(3) = 1$$

(5 คะแนน)

17. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2xy - 3x^2)dx + (x^2 - 2y + 1)dy = 0$$

(5 คะแนน)

18. จงหาตัวประกอบปริพันธ์ (integrating factor) ที่ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์

$$(xy^2 + y^2 - xy) + (x^2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง (exact equation)

(5 คะแนน)

19. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = 2 + t^2, \quad y(1) = 2$$

(5 คะแนน)

20. จงหาวงค์เส้นโค้งแนววิถีเชิงตั้งฉาก (orthogonal trajectories) กับวงค์เส้นโค้ง

$$y = \frac{x^2}{2} + x + c, \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ}$$

(5 คะแนน)