ข้อสอบปลายภาค ประจำภาคต้น ปีการศึกษา 2566
รายวิชา 30222164 - คณิตศาสตร์วิศวกรรม 3
สอบวันที่ 30 ตุลาคม พ.ศ. 2566 เวลา 9.00-12.00 น.

ชื่อ – นามสกุล ..... รหัสประจำตัว .....

กลุ่ม ..... ลำดับที่ .....

*** ห้ามแกะข้อสอบออกจากกัน ***

<u>คำชี้แจง</u>

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 16 หน้า (รวมหน้านี้) 16 ข้อ 90 คะแนน (คิดเป็น 45%)
   ข้อที่ 16 เป็นข้อที่ให้คะแนนพิเศษเพิ่ม 10 คะแนน (คิดเป็น 5%)
2. สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการทำข้อสอบ
3. ไม่อนุญาตให้นิสิตนำเครื่องคิดเลขและเอกสารใด ๆ เข้าห้องสอบ
   ยกเว้น กระดาษขนาดไม่เกิน A4 ที่จดเนื้อหาของรายวิชาด้วยลายมือตนเอง
4. ให้เขียน รหัสประจำตัว และลำดับที่ ทุกหน้าของข้อสอบ
5. หากยังไม่ได้ส่งข้อสอบ ห้ามออกจากห้องสอบไม่ว่ากรณีใด ๆ
6. **ส่อทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ภาคการศึกษา**
   ทุจริต ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 1 ปีการศึกษา
   ให้ผู้อื่นเข้าสอบแทน ติด F ในรายวิชานี้และพักการเรียน 2 ปีการศึกษา

คะแนน (สำหรับอาจารย์)

ข้อ	1 (3)	2 (4)	3 (6)	4 (5)	5 (7)	6 (7)
คะแนน						
ข้อ	7 (9)	8 (3)	9 (6)	10 (10)	11 (6)	12 (8)
คะแนน						
ข้อ	13 (6)	14 (4)	15 (6)	**รวมคะแนน ข้อ 1-15 (90)**		**ข้อ พิเศษ 16 (10)**
คะแนน						

กลุ่ม 2	ผศ.ดร.อภิชาติ เนียมวงษ์	K-C300	กลุ่ม 5	ผศ.ดร.จุฑารัตน์ คงสอน	QS1-2001
กลุ่ม 3	ผศ.ดร.สหัทยา รัตนะมงคลกุล	K-A500	กลุ่ม 6	ผศ.ดร.สิ่นีนาฏ ศรีมงคล	K-A500
กลุ่ม 4	ผศ.เสาวรส ศรีสุข	K-A500	กลุ่ม 7	ผศ.ดร.ลี ศาสนพิทักษ์	QS1-1001

Differentiation

$$\frac{dc}{du} = 0, \ (c \text{ constant})$$
$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{(Chain Rule)}$$
$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dx}, \ a \neq 1 \text{ และ } a > 0$$
$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u\tan u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u\cot u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}, \ a \neq 1 \text{ และ } a > 0$$
$$\frac{d}{dx}\arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

Integration

$$\int du = u + c$$
$$\int udv = uv - \int v\,du, \quad \text{(by part)}$$
$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c$$
$$\int e^u\,du = e^u + c$$
$$\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + c, \ a \neq 1 \text{ และ } a > 0$$
$$\int \sin u\,du = -\cos u + c$$
$$\int \cos u\,du = \sin u + c$$
$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$$
$$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + c$$
$$\int \sec u\tan u\,du = \sec u + c$$
$$\int \csc u\cot u\,du = -\csc u + c$$
$$\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + c$$
$$\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + c$$
$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + c$$
$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + c$$
$$\int \sinh u\,du = \cosh u + c$$
$$\int \cosh u\,du = \sinh u + c$$
$$\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + c$$
$$\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + c$$
$$\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + c$$
$$\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + c$$
$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + c, \ a > 0$$
$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c, \ a > 0$$

E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 10^{th} Edition, Wiley Plus.

ตารางผลการแปลงลาปลาซ

$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=L\{f(t)\}$	$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=L\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, \quad n=1,2,...$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, \quad p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, \quad n=1,2,...$	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t\sin(at)$	$\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	10. $t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
11. $\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	12. $\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
13. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	14. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
15. $e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	16. $e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
17. $e^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	18. $e^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
19. $t^n e^{at}, \ n=1,2,...$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	20. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
21. $u_c(t)=u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	22. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
23. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	24. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
25. $t^n f(t), \ n=1,2,...$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	25. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
27. $f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	28. $f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
29. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-....-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$		

1. จงหา<u>ผลเฉลยทั่วไป</u>ของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์อันดับ 6 ซึ่งมีรากของสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) คือ (3 คะแนน)

$$0, \quad 7, \quad -7, \quad -7, \quad \pm\frac{1}{2}i$$

2. จงหา<u>ผลเฉลยทั่วไป</u>ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - 4y' = 0$ (4 คะแนน)

3. จงหา<u>ผลเฉลยทั่วไปและผลเฉลยเฉพาะ</u>ของสมการเชิงอนุพันธ์ (6 คะแนน)

$$y'' - 10y' + 25y = 0, \qquad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 8$$

4. กำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์ (5 คะแนน)

$$y'' + 9y = x\cos(3x) + \sin(3x)$$

มีผลเฉลยทั่วไป คือ $y = y_c + y_p$ และ $y_c(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x)$

จงเขียน<u>รูปแบบผลเฉลย</u>ของ y_p

(เขียนให้อยู่ในรูปสัมประสิทธิ์ $A, B, C, D, ...$ หรือ $A_1, A_2, A_3, A_4...$ แต่ไม่ต้องหาค่า)

5. กำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์ (7 คะแนน)

$$y'' + 4y' - 5y = 3e^x$$

มีผลเฉลยทั่วไป คือ $y = y_c + y_p$ และ $y_c(x) = c_1e^{-5x} + c_2e^x$

จงหา<u>ผลเฉลยทั่วไป</u>

6. จงใช้นิยามการแปลงฟูเรียร์เพื่อหาผลการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} -2, & 0 < x < 1 \\ 2, & -1 < x \leq 0 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

(7 คะแนน)

7. จงใช้ตารางการแปลงลาปลาซเพื่อหาผลการแปลงลาปลาซ (Laplace transform)

7.1. $f(t) = \cosh(10t) + \frac{1}{5}e^{-3t}$ (3 คะแนน)

7.2. $g(t) = t^3e^{5t} - e^{5t}\sin(2t)$ (3 คะแนน)

7.3. $h(t) = \frac{1}{3}u_5(t) + (t+2)u_8(t)$ (3 คะแนน)

8. จงเขียนฟังก์ชัน $f(t)$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของ Heaviside function ($u_c(t)$)

$$f(t) = \begin{cases} 5, & t < 2 \\ 2, & 2 \le t < 4 \\ t, & t \ge 4 \end{cases}$$

(3 คะแนน)

9. จงใช้ปริพันธ์สังวัตนาการ (Convolution integral) เพื่อหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชัน

$$H(s) = \frac{6}{s^2(s+3)}$$

(6 คะแนน)

10. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันฟังก์ชันต่อไปนี้

10.1) $F(s) = \dfrac{1}{s^3} - \dfrac{1}{s-3}$ (3 คะแนน)

10.2) $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2+4s-5}$ (4 คะแนน)

10.3) $H(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s^2-16}$ (3 คะแนน)

11. จงใช้การแปลงลาปลาซ เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ (6 คะแนน)

$$y'' + 16y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$$

12. จงใช้การแปลงลาปลาซ เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' - 4y = 4u_2(t), \qquad y(0) = 0$$

(8 คะแนน)

13. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

13.1. จงพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยต่อไปนี้มี**อันดับ (order)** เป็นเท่าใด มีสมบัติเป็น**สมการเชิงเส้น (linear) หรือไม่เชิงเส้น (nonlinear)** เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบ**เอกพันธ์ (homo.) หรือไม่เอกพันธ์ (nonhomo.)** (4.5 คะแนน)

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	**order**	**linear** หรือ **nonlinear**	**homo.** หรือ **nonhomo.**
$u^5_{xxyx} + u_{yy} = e^x$			
$u_{xx} + u_x - 5u_t = u^2$			
$u_{xtt} - 2u_{xx} + u_{xt} = \cos(u)$			

13.2. จงพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นต่อไปนี้
สมการใดบ้างเป็น สมการอนุพันธ์ย่อยคล้ายเชิงเส้น (quasilinear)
และสมการใดบ้างเป็น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกึ่งเชิงเส้น (semilinear) (1.5 คะแนน)

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	**quasilinear** หรือ **semilinear**
$tu_{xxy} - x^2u_y = t^5u$	
$xu_{xx} + u_x + uu_{xt} = \sin(t)$	
$u_{tt} + uu_{xx} + u_{xt} = 0$	

14. จงแสดงว่า $u(x,t) = e^{(2x-t)}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4 คะแนน)

$$u_{tt} + u_{xx} = 5u$$

15. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$u_{xx} = 2xe^t$$

(6 คะแนน)

—— ข้อที่ 16 เป็นข้อที่ให้คะแนนเพิ่มพิเศษอีก 10 คะแนน (หรือ คิดเป็น 5%) ——

16. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (10 คะแนน)

$$u_t + 3u_x = 1 \ , \quad u(x,0) = \cos(x)$$

ข้อที่ 16. (ทำต่อ)