มหาวิทยาลัยบูรพา

ข้อสอบปลายภาคปลาย ปีการศึกษา 2567 **วันที่ 31 มีนาคม 2568**

วิชา 30212264 คณิตศาสตร์วิศวกรรม 2 **เวลา 09.00 - 12.00 น.**

ชื่อ - นามสกุล ..... **รหัสประจำตัว**.....**กลุ่ม**.....**เลขที่**.....

คำชี้แจง 1. ข้อสอบมีทั้งหมด 20 ข้อ 15 หน้า 90 คะแนน (คิดเป็น 45%) ให้แสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ

2. สามารถใช้ได้ทั้งดินสอและปากกาในการสอบ
3. **ไม่**สามารถใช้เครื่องคิดเลขได้
4. **ไม่**อนุญาตให้นำกระดาษจดเข้าห้องสอบได้
5. การกระทำต่อไปนี้จะถือว่าเป็นการ **ส่อทุจริต**
   - แกะชุดข้อสอบออกจากกัน
   - การพูดคุย-ซักถามไม่ว่ากรณีใด ๆ ระหว่างผู้เข้าสอบ
   - หยิบโทรศัพท์หรืออุปกรณ์สื่อสารขึ้นมาระหว่างทำการสอบ

คะแนนสำหรับอาจารย์

ข้อ	1(3)	2(4)	3(6)	4(5)	5(3)	6(4)	7(4)
คะแนน							

ข้อ	8(5)	9(5)	10(4)	11(5)	12(5)	13(4)	14(4)
คะแนน							

ข้อ	15(5)	16(5)	17(3)	18(5)	19(5)	20(6)
คะแนน						

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

สูตรการหาอนุพันธ์

1. $\frac{dc}{dx} = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ
2. $\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ
3. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}, v \neq 0$
6. $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$
8. $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$
9. $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dx}$ **เมื่อ** $a > 0$
10. $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
11. $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\frac{du}{dx}$
12. $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u\frac{du}{dx}$
13. $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$
14. $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u\tan u\frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u\cot u\frac{du}{dx}$

สูตรการหาปริพันธ์

1. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่
2. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
3. $\int du = u + c$
4. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$
5. $\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c$
6. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + c$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$
7. $\int e^u\,du = e^u + c$
8. $\int \sin u\,du = -\cos u + c$
9. $\int \cos u\,du = \sin u + c$
10. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$
11. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + c$
12. $\int \sec u\tan u\,du = \sec u + c$
13. $\int \csc u\cot u\,du = -\csc u + c$
14. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + c = -\ln|\cos u| + c$
15. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + c$
16. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + c$
17. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + c$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

เวกเตอร์

1. กำหนดให้ $\vec{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ขนาดเวกเตอร์คือ

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

2. เวกเตอร์หน่วยในทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ คือ $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

3. ผลคูณเชิงสเกลาร์ ของ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ คือ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

หรือ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta$

4. มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \text{ เมื่อ } 0 \le \theta \le \pi$$

หมายเหตุ เวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ที่ไม่เป็น $\vec{0}$ จะตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

5. ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ คือ

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

หมายเหตุ เวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ที่ไม่เป็น $\vec{0}$ จะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 0$

6. ระยะห่างระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ คือ

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

7. เส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ มี สมการเส้นตรงแบบอิงตัวแปรเสริมคือ

$$x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$$

และสมการเส้นตรงแบบสมมาตรคือ

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

8. ระยะทางระหว่างจุด Q กับเส้นตรง

$$x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$$

โดยที่ P คือจุดบนเส้นตรง และ $\vec{v}$ คือเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรง คือ

$$\frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

9. ระนาบที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และมีเวกเตอร์ $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ ตั้งฉากกับระนาบ มีสมการคือ

$$ax + by + cz = d$$

เมื่อ $d = ax_0 + by_0 + cz_0$

10. มุมระหว่างระนาบ $P_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ และ $P_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ ซึ่งมี $\vec{n}_1 = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ และ $\vec{n}_2 = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ P_1 และ P_2 ตามลำดับ จะได้

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_1}\|\|\overrightarrow{n_2}\|}$$

11. ระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ กับระนาบ $ax + by + cz + d = 0$ คือ

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

12. ระยะทางระหว่างระนาบ

$$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

และ $P_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

คือ $\dfrac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

13. ระยะทางระหว่างเส้นไขว้ต่างระดับ (skew line)

$L_1 : x = x_1 + a_1t, y = y_1 + b_1t, z = z_1 + c_1t,$

และ

$L_2 : x = x_2 + a_2s, y = y_2 + b_2s, z = z_2 + c_2s$

คือ $\dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2})|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|}$

เมื่อ $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$ และ

$\overrightarrow{v_1} = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ คือเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรง L_1

$\overrightarrow{v_2} = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ คือเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรง L_2

ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

กำหนดให้ $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$

1. ลิมิตของ $\vec{r}(t)$ คือ

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to t_0} \vec{f}(t), \lim_{t\to t_0} \vec{g}(t), \lim_{t\to t_0} \vec{h}(t) \right\rangle$$

2. อนุพันธ์ของ $\vec{r}(t)$ คือ

$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$
$$= f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$$

3. เวกเตอร์หน่วยสัมผัส คือ $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$

4. ปริพันธ์จำกัดเขตของ $\vec{r}(t)$ คือ

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \left[\int_a^b \vec{f}(t)dt\right]\vec{i} + \left[\int_a^b \vec{g}(t)dt\right]\vec{j} + \left[\int_a^b \vec{h}(t)dt\right]\vec{k}$$

5. ความยาวส่วนโค้งของ $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ บนช่วง $a \le t \le b$ คือ

$$\int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}dt$$
$$= \int_a^b \|r'(t)\|dt$$

6. ความเร็ว คือ

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

7. อัตราเร็ว คือ

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}$$

8. ความเร่ง คือ

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle$$

9. อัตราเร่ง คือ

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{(f''(t))^2 + (g''(t))^2 + (h''(t))^2}$$

ปริพันธ์ตามเส้น

1. ปริพันธ์ตามเส้นโค้ง C ที่มีสมการเป็น $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ บนช่วง $a \le t \le b$ คือ

$$\int_C f(x,y,z)ds$$
$$= \int_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\|dt$$
$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

ปริพันธ์หลายชั้น

1. พื้นที่ของบริเวณ R ที่เป็นบริเวณปิดบนระนาบ xy คือ

$$A = \iint_R dA$$

2. ปริมาตรของทรงตัน S ที่ปกคลุมด้วยพื้นผิว $z = f(x,y)$ และอยู่เหนือบริเวณ R ที่เป็นบริเวณปิดบนระนาบ xy คือ $V = \iint_R z dA$

3. **ระบบพิกัดเชิงขั้ว** แปลงพิกัดมีสูตร คือ

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, r^2 = x^2 + y^2$$

พื้นที่บริเวณ R คือ $A = \iint_R dA = \iint_R r dr d\theta$

เมื่อทรงตัน S ล้อมรอบด้านบนด้วยพื้นผิว $z = f(r,\theta)$ และด้านล่างด้วยบริเวณ R คือ

$$V = \iint_R z \cdot r dr d\theta$$

4. **ระบบพิกัดทรงกระบอก** แปลงพิกัดมีสูตร คือ

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$$

และ $r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

เมื่อทรงตัน G ล้อมรอบด้านบนด้วยผิวโค้ง $z = g_2(r,\theta)$ และถูกปิดด้านล่างด้วยผิวโค้ง $z = g_1(r,\theta)$ ถ้าภาพฉายของ G บนระนาบ xy คือบริเวณ R

$$\iiint_G f(r,\theta,z)dV$$
$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\, r\, dz dr d\theta$$

5. **ระบบพิกัดทรงกลม** แปลงพิกัดมีสูตร คือ

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\phi \text{ และ } \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกลมจะเป็น

$$\iiint_G f(\rho,\phi,\theta)dV$$
$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)}\int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta.)} f(\rho,\phi,\theta)\,\rho^2\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta$$

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. (3 คะแนน) **จงหาสมการเส้นตรง**ที่ผ่านจุด $A(3,-1,1)$ และ $B(1,0,2)$ ในรูปแบบ

1.1 สมการอิงตัวแปรเสริม

1.2 สมการแบบสมมาตร

2. (4 คะแนน) **จงหามุม**ระหว่างระนาบ $x+2y+7z=3$ และระนาบ $-2x+5y-5z=-1$

3. (6 คะแนน) **จงแสดงว่า** เส้นตรง $l_1 : x = 2t,\ y = 3 + t,\ z = -3 + 4t$

และ $l_2 : x = 1 + s,\ y = 5 - s,\ z = 4 + s$

เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนาน และไม่ตัดกัน (เป็นเส้นไขว้ต่างระดับ)

4. (5 คะแนน) กำหนดสมการเส้นตรง $l_1 : x = 1 + t,\ y = 6 + t,\ z = 1$

และ $l_2 : x + 3 = \dfrac{y - 1}{2} = z$

จงหาสมการระนาบที่มีเส้นตรง l_1 และ l_2 อยู่บนระนาบ

5. (3 คะแนน) **จงหาระยะห่าง**ระหว่างระนาบ $z = x + 2y + 1$ และระนาบ $3x + 6y - 3z = 4$

6. (4 คะแนน) กำหนด $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\ln(t-1)}{t-2}, \frac{e^{t-2}}{2-t^2}, \frac{\cos(\frac{t\pi}{2})}{t^3-2} \right\rangle$

จงหา $\lim_{t\to 2} \vec{r}(t)$

7. (4 คะแนน) กำหนดฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = \left\langle t^3,\ 3t^2,\ 6t \right\rangle$

จงหา เวกเตอร์หน่วยสัมผัส เมื่อ $t = 1$

8. (5 คะแนน) กำหนด $\vec{r}(t) = \left\langle \sin(2t),\ \frac{1}{t+2},\ e^t + 2t \right\rangle$

จงหา $\int \vec{r}(t)dt$

9. (5 คะแนน) **จงหาความยาวของส่วนโค้ง**ที่มีฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = 4\sin(t)\vec{i} + 3t\,\vec{j} + 4\cos(t)\vec{k}$ จากจุด $(0, 0, 4)$ ไปยังจุด $(0, 6\pi, -4)$

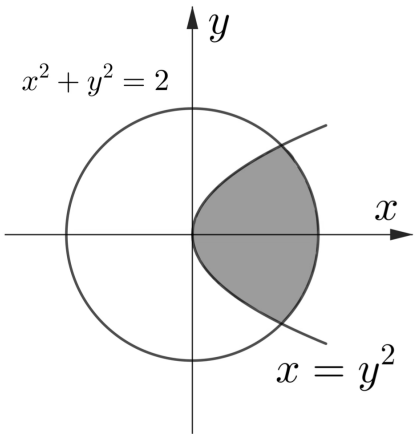
10. (4 คะแนน) วัตถุเคลื่อนที่มีเวกเตอร์ตำแหน่งเป็น $\vec{r}(t) = e^t\,\vec{i} + e^{-2t}\,\vec{j} + t\,\vec{k}$
จงหาอัตราเร็ว ณ เวลา $t = 0$

11. (5 คะแนน) กำหนดเวกเตอร์ความเร่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ ณ เวลา t เป็น $\vec{a}(t) = \left\langle 3t - 2,\ 2t, 1 - 6t^2 \right\rangle$ และ เวกเตอร์ความเร็วเริ่มต้นของวัตถุ ณ เวลา $t = 0$ เป็น $\vec{v}(0) = \left\langle 1, 0, -1 \right\rangle$
จงหา เวกเตอร์ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

12. (5 คะแนน) **จงหา ค่าของปริพันธ์ตามเส้น** $\int_C xz\, ds$
เมื่อ C คือส่วนของเส้นตรงจาก $(1, 2, 3)$ ไป $(3, -2, 7)$

13. (4 คะแนน) จงหาค่าของ $\int_0^6 \int_2^4 xe^y \, dx dy$

14. (4 คะแนน) **จงเขียนขอบเขตของปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉากเพื่อหาพื้นที่**ปิดล้อมของบริเวณ R ดังรูป โดยไม่ต้องหาค่าของปริพันธ์



15. กำหนด $\int_1^4 \int_2^{y+1} f(x,y)\,dx\,dy$

15.1 (2 คะแนน) **จงเขียนรูป**แสดงบริเวณพื้นที่ R ของการหาปริพันธ์

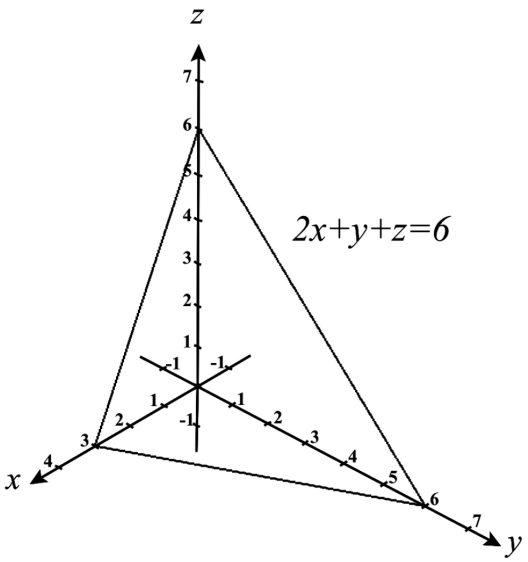
15.2 (3 คะแนน) **จงสลับลำดับ**ของการหาปริพันธ์ (เขียนขอบเขตของ $\iint_R f(x,y)\,dy\,dx$)

16. (5 คะแนน) **จงหาค่า**ของปริพันธ์ $\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$
โดยการ**แปลงให้เป็นปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว**

17. (3 คะแนน) จงแปลงจุด $(\sqrt{3},-3,2)$ ในระบบพิกัดฉาก ให้เป็นจุดในระบบพิกัดทรงกลม

18. (5 คะแนน) กำหนดให้ G เป็นรูปทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยระนาบ $2x + y + z = 6$ ในอัฐภาคที่ 1 ดังรูป

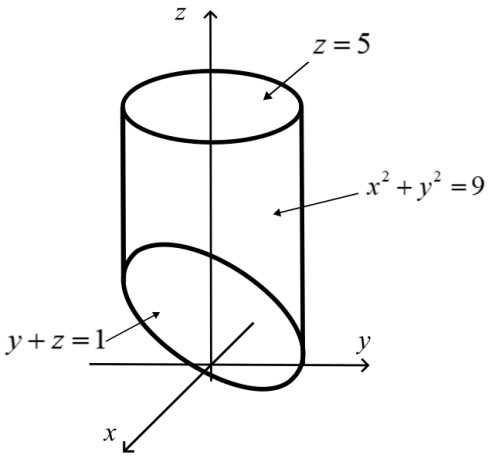
จงเขียนขอบเขตของปริพันธ์สามชั้น $\iiint_G f(x,y,z)\,dV$ โดยไม่ต้องหาค่าของปริพันธ์



19. (5 คะแนน) กำหนดให้ G เป็นรูปทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้านบนด้วย $z = 5$ ด้านข้างด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 9$ และด้านล่างด้วยระนาบ $y + z = 1$ ดังรูป

จงเขียนขอบเขตของปริพันธ์สามชั้น $\iiint_G x\,dV$ **ในระบบพิกัดทรงกระบอก**

โดยไม่ต้องหาค่าของปริพันธ์



20. (6 คะแนน) กำหนดให้ G เป็นรูปทรงตันเหนือระนาบ xy ที่ถูกปิดล้อมด้านบนด้วยพื้นผิวระหว่างทรงกลม $x^2+y^2+z^2=9$ และ $x^2+y^2+z^2=1$ ดังรูป

จงหาค่าของ $\iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$ **ในระบบพิกัดทรงกลม**